Kategoriler Teorisi

Yoneda Önsavı ☺☹

Olcay Coşkun
Boğaziçi Üniversitesi
olcaycoskun@gmail.com

Giriş yazımızda da belirttiğimiz gibi ve artık okurlarımızın da kolaylıkla kabul edeceği gibi, tüm kategorilerde ya da tüm izleçler için doğru olacak bir sonuç bulmak çok zordur! Diğer taraftan eğer böyle bir sonuç bulursak da kanıtının çok zor olmamasını bekleriz.

Sıradaki sonuç tam da böyle bir örnek. Çok temel, ama aynı zamanda derin bir sonuç olan Yoneda Önsavı'nı kanıtlayacağız:

Önsav 1 (**Yoneda Önsavı**). *$\mathcal{C}$ bir kategori,*

$$F : \mathcal{C} \to \textbf{Küme}$$

bir izleç olsun. Ayrıca $X \in \mathcal{C}$ ve karşılık gelen hom-izleci,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \textbf{Küme}$$

verilsin. Bu gösterimle,

- *$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$'ten F'ye giden doğal dönüşümlerle,*
- *$F(X)$ kümesinin elemanları arasında*

birebir ve örten bir eşleme,

$$\theta_{F,X} : \mathrm{DD}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-), F) \to F(X)$$

bulunur. Bu eşleme hem F hem de X'te doğaldır.

Kanıt. İlk olarak $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \Rightarrow F$ doğal dönüşümü verilsin.

$$\theta_{F,X}(\eta) = \eta_X(\mathrm{id}_X)$$

olarak tanımlayalım.

Bu fonksiyonun tersini aşağıdaki gibi kuralım. Verilen $x \in F(X)$ elemanı için,

$$\tau(x) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \Rightarrow F$$

doğal dönüşümünü, her $Y \in \mathcal{C}$ için,

$$\begin{array}{rcl} \tau(x)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & F(Y) \\ \alpha & \mapsto & F(\alpha)(x) \end{array}$$

fonksiyonu olarak tanımlayabiliriz. Dikkat ederseniz, $\alpha : X \to Y$ morfizmasına F izlecini uyguladığımızda $F(\alpha) : F(X) \to F(Y)$ fonksiyonunu elde ederiz. Dolayısıyla, bu fonksiyonu $x \in F(X)$ elemanında hesaplamak anlamlıdır. Bu fonksiyonların bir doğal dönüşüm verdiğini gösterebilmek için aşağıdaki diyagrama göz atalım:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\tau(x)_Y"] \arrow[d, "f^*"] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ Z & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\tau(x)_Z"] & F(Z) \end{tikzcd}$$

Bu diyagramın değişmeli olduğunu kanıtlamak üzere yine iki yönden bileşke hesaplayalım. İlk olarak sağa gidersek:

$$F(f) \circ \tau(x)_Y(\alpha) = F(f)(F(\alpha)(x)) = F(f \circ \alpha)(x)$$

elde ederiz. Burada F'nin bileşkeyi koruduğunu kullandık. Şimdi ilk olarak aşağıya gittiğimizde,

$$\tau(x)_Z \circ f^*(\alpha) = \tau(x)_Z(f \circ \alpha) = F(f \circ \alpha)(x)$$

sonucunu buluruz. Eşitlik elde etmiş olduk. Öyleyse,

$$\tau : F(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$$

fonksiyonunu tanımlamış olduk. Son olarak τ'nun θ'nın tersi olduğunu kontrol edelim. İlk olarak,

$$\begin{array}{rcl} \theta_{F,X}(\tau(x)) & = & \tau(x)_X(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(x) \\ & = & \mathrm{id}_X(x) = x \end{array}$$

eşitlikleri tanımları takip ederek kolayca hesaplanır. Diğer bileşke biraz daha dikkat gerektiriyor. Verilen bir $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \Rightarrow F$ doğal dönüşümü için $\tau(\theta_{F,X}(\eta))$ doğal dönüşümünün η'ya eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için verilen bir $\alpha : X \to Y$ morfizmasındaki değerinin $\eta_Y(\alpha)$'ya eşit olduğunu bulmalıyız. Hesaplayalım:

$$\tau(\theta_{F,X}(\eta))_Y(\alpha) \quad = \quad \tau(\eta_X(\mathrm{id}_X))_Y(\alpha)$$

Burada sadece θ'nın tanımını uyguladık. Şimdi τ'nun tanımını uygulayalım:

$$= \quad F(\alpha)(\eta_X(\mathrm{id}_X))$$

Başlangıçta η'nın bir doğal dönüşüm olduğunu hatırlayın. Yani yukarıdaki diyagramda $\tau(x)$ yerine η koyduğumuzda diyagram değişmeli olacak. Dikkat ederseniz, yukarıdaki eşitlik, elde edeceğimiz bu diyagramda id_X'in önce sağa giderek hesaplanan görüntüsüdür. Öyleyse önce aşağıya giderek hesaplanan görüntüye eşit olmalıdır, yani,

$$= \quad \eta_Y \circ \alpha^*(\mathrm{id}_X)$$

olur. Son olarak α^*'ın tanımını uygulayıp eşitliğin sol tarafını da tekrarlarsak, beklendiği gibi,

$$\tau(\theta_{F,X}(\eta))_Y(\alpha) = \eta_Y(\alpha)$$

eşitliğini elde ederiz. Kanıtımız, doğallık haricinde, tamamlanmış oldu.[1] ☐

Yukarıdaki formuyla kategorileri yeni öğrenen okurlarımız bu sonucun değerini görmekte zorlanabilir. İyi bilinen sonuçlardan bazılarını kanıtlayıp Yoneda Önsavı'nı biraz parlatalım.

"Yoneda gömmesi" adını verdiğimiz ilk sonuç "her nesne diğer nesnelerle olan ilişkileri tarafından biricik belirlenir" ilkesinin matematiksel bir açıklamasını getirmektedir. Önce, nesneleri diğerleriyle olan ilişkilerine gönderen bir izleç tanımı verelim.

$\mathcal{C}$ bir kategori ve $X \in \mathcal{C}$ olsun. Hatırlarsanız $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Küme}$ ile gösterdiğimiz aksi izleci tanımlamıştık. Bu izleç altında $f^{\mathrm{op}} : Y \to Z$'nin görüntüsü,

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X), g \mapsto g \circ f$$

fonksiyonuna götürür. Şimdi X'i bir değişken gibi düşünürsek,

$$\mathscr{Y} : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Küme}], X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$$

izlecinin nesneler üzerindeki etkisini elde ederiz. Ayrıca her $h : X \to X'$ morfizmasına karşılık gelen,

$$\eta(h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X')$$

doğal dönüşümünü tanımlamamız gerekli. Verilen her $Y \in \mathcal{C}$ için,

$$\eta(h)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X')$$

fonksiyonunu $f \mapsto f^*$ olarak tanımlayalım. Bu tanımla birlikte bir doğal dönüşüm elde ettiğimizi göstermek okuyucu için zor olmamalı. Yukarıda da yaptığımız gibi, karşılık gelen kare diyagramın değişmeli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Kurduğumuz,

$$\begin{aligned} \mathscr{Y} \quad : \quad & \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Küme}] \\ & X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \\ & h \longmapsto \eta(h) \end{aligned}$$

izleci *Yoneda gömmesi* adıyla bilinir.[2] Yoneda Önsavı'nın ilk sonucu, aynı zamanda Cayley Teoremi'nin de bir genellemesi olarak görülebilecek sonuç aşağıda.

> **Sonuç 1.** *Yoneda gömmesi dolu ve sadıktır.*

Kanıt. Yapmamız gereken Yoneda gömmesinin, verilen iki nesne arasındaki morfizmalar üzerinde birebir ve örten olduğunu göstermek. Bir diğer ifadeyle, her $X, Y \in \mathcal{C}$ için,

$$\begin{aligned} \mathscr{Y} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ & \to \mathrm{DD}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)) \end{aligned}$$

fonksiyonu birebir ve örten olmalıdır. Dikkat ederseniz bu kümeler tam olarak Yoneda Önsavı'nı $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ izlecine uyguladığımızda elde edeceğimiz kümelerdir. Öyleyse tek yapmamız gereken fonksiyonun da aynı sonuçtan geldiğini görmektir. Teknik detayları ilgili okuyucuya bırakıyoruz. ☐

Yoneda gömmesinin değeri üzerine birkaç söz söylemek gerekli. Öncelikle $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Küme}]$ izleç kategorisi çalışabileceğimiz iyi kategorilerden birisidir; çünkü izleçler hedef kategorideki özellikleri alırlar. Örneğin, limitler üzerine ikinci yazımızda bahsettiğimiz gibi **Küme** kategorisinde bütün limitler vardır! Şimdi başladığımız soyut $\mathcal{C}$ kategorisini $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Küme}]$'ye gömdüğümüzde burada $\mathcal{C}$'nin bir kopyasını elde etmiş oluruz, yani soyut $X \in \mathcal{C}$ nesnelerini, hom-izleçleri $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'a ve yine soyut olarak verilen morfizmaları doğal dönüşümlere çevirmiş oluruz.

Dikkatli okuyucularımız burada bir eksik olduğunu fark edecektir. Her ne kadar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ eşitliği ancak ve ancak $X = Y$ iken doğruysa da benzer bir sonucun eşyapılı nesneler arasında da olması gerekir. Diğer durumda, eşyapılı olmayan bazı nesnelerin görüntüleri eşyapılı olabilir ve o zaman da yukarıdaki gömme etkisini kaybeder. Sıradaki sonucumuz bunun olmayacağını gösteriyor.

> **Teorem 1.** *$X, Y \in \mathcal{C}$ verilsin. Aşağıdaki önermeler denktir.*
>
> 1. $X \cong Y$
> 2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$

[1] Doğallık tanımlarını burada vermeyeceğiz. İlgili okuyucu kaynak kitapların herhangi birinden ulaşabilir.
[2] Bir de aksi Yoneda gömmesi tanımlanabilir. Bunun için hedef kategorisi $[\mathcal{C}, \mathbf{Küme}]$ alınmalıdır.

Kanıt. İki önerme kanıtlamalıyız: $1 \Rightarrow 2$ ve $2 \Rightarrow 1$. İlk önerme açık, çünkü eğer $X \cong Y$ ise Yoneda gömmesi bir izleç olduğundan $\mathscr{Y}(X) \cong \mathscr{Y}(Y)$ olur, yani

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$$

Şimdi $2 \Rightarrow 1$'i kanıtlamak üzere yukarıdaki denkliğin sağlandığını varsayalım. Ayrıca f bu iki izleç arasında bir izomorfizma olsun. $\mathscr{Y}$ izleci dolu ve sadık olduğundan, $\mathscr{Y}(g) = f$ eşitliğini sağlayan biricik $g : X \to Y$ morfizması vardır. Benzer şekilde, $\mathscr{Y}(h) = f^{-1}$ eşitliğini sağlayan biricik $h : Y \to X$ morfizması da vardır. Ama $\mathscr{Y}$ bir izleç olduğundan,

$$\mathrm{id}_{\mathscr{Y}(X)} = f^{-1} \circ f = \mathscr{Y}(h) \circ \mathscr{Y}(g) = \mathscr{Y}(hg)$$

eşitlikleri de sağlanır. Son olarak $\mathscr{Y}$ sadık olduğundan, $hg = \mathrm{id}_X$ buluruz. Benzer yöntemle $gh = \mathrm{id}_Y$'de bulunur. Dolayısıyla $g : X \to Y$ bir izomorfizmadır. □

Kategori teoristlerin sevdiği bir söz/iddia var: Her şey kategoridir. Bu iddia küme teoristlerin "her şey kümedir" iddiasının güncellemesidir. Yoneda Önsavı'yla birlikte her şeyin izleç olduğunu söylemiş oluyoruz! Yani gerçekten de nesneler değil ilişkiler önemli!!!

Son olarak Yoneda Önsavı ile Cayley Teoremi arasındaki ilişkiye bakalım. Amacımız Cayley Teoremi'ni Yoneda Önsavı'nın bir sonucu olarak kanıtlamak.

Teorem 2 (Cayley Teoremi)**.** *Her grup bir permütasyon grubuyla eşyapılıdır.*

Bu gruplar teorisinin en güzel (ama pek de kullanışlı olmayan) teoremlerinden biridir. Grup etkilerini kullanan kanıtı da ilham vericidir. Burada vereceğimiz kanıtın amacı bu teoremin gerçekten de Yoneda Önsavı'nın bir özel durumu olduğunu görmek.

Kanıt. G bir grup ve $\mathfrak{G}$ karşılık gelen bir nesneli kategori olsun. Bu kategoriden sadece bir tane hom-izleci bulabiliriz:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star) : \mathfrak{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Küme}$$

Bu izleç $\star$ nesnesini $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\star,\star) = G$ kümesine götürecek. Ayrıca eğer $g : \star \to \star$ morfizması verilirse,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(g,\star) : G \to G, \quad x \mapsto x \cdot g$$

olacaktır. Hatırlarsanız, her $\mathfrak{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Küme}$ izleci bir G-kümesine karşılık geliyordu. Bu hom-izlecinin karşılık geldiği G-kümesi G, üzerinde sağdan G'nin elemanları ile çarpma etkisiyle verilen ve G_G ile gösterilen kümedir.

Şimdi Yoneda Önsavı'nı $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star)$ izlecine uygularsak,

$$\mathrm{DD}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\star,\star)$$

buluruz. Sağ tarafta G kümesini elde ettik. Peki sol taraftaki küme nedir? Yine $\mathfrak{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Küme}$ izleçleri kategorisiyle G-**Küme** kategorisi arasındaki denkliği düşünürsek,

$$\begin{aligned} &\mathrm{DD}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(-,\star)) \\ &\qquad \cong \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{Küme}}(G_G, G_G) \end{aligned}$$

yani G-etkisini koruyan $G_G \to G_G$ fonksiyonlar kümesi olmalıdır. Gruplar teorisinden standart bir sonuç olarak $\mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{Küme}}(G_G, G_G)$ kümesinin sağdan grup elemanlarıyla çarpma fonksiyonlarının kümesine eşit olduğunu biliyoruz:

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{Küme}}(G_G, G_G) = \{r_g : x \mapsto x \cdot g \mid g \in G\}.$$

Dolayısıyla Cayley Teoremi'nin kanıtında olduğu gibi,

$$G \cong \{r_g : x \mapsto x \cdot g \mid g \in G\}$$

buluruz. □

Kategoriler Teorisi

Limit ve Eş-Limit II ☹☹

Olcay Coşkun
Boğaziçi Üniversitesi
olcaycoskun@gmail.com

Bu kısa yazımızda, kategoriler kuramının en önemli araçlarından olan limit/eş-limit kavramlarıyla ilgili sonuçlara göz atacağız. İlk olarak tanımımızda bir güncelleme yapalım. Hatırlarsanız ilk yazımızda, diyagramların limitlerinden bahsetmiştik. Daha sonra her diyagramın aslında bir izleç olduğunu da söyledik. Dolayısıyla, *izleçlerin limitlerinden/eş-limitlerinden* bahsedebiliriz. Bu değişimin bir avantajı diyagramları, verilen kategoride kurmak yerine, daha soyut olarak bir kategorinin görüntüsü olarak görebilmemizdir. Dikkat ederseniz, örneklerimizde de diyagramlar kategorilere özel değildi!

Metrik ya da topolojik uzayları bilen okurlarımız limit kavramıyla birlikte tamlık sorusunu, yani hangi kategorilerde bütün limitlerin var olduğu sorusunu da akıllarına getirecektir. Önce tanım:

Tanım 1. Eğer $\mathcal{C}$ kategorisinde bütün küçük diyagramların[a] limiti varsa $\mathcal{C}$'ye *tam* kategori, eğer bütün küçük diyagramların eşlimiti varsa $\mathcal{C}$'ye *eştam* kategori[b] denir.

[a]Burada "küçük" sıfatı diyagramdaki köşelerin bir küme oluşturduğu anlamına geliyor.

[b]İngilizce terimler complete/cocomplete. Eştam çok iyi bir çeviri olmasa da "co-" eki için daha iyi bir önerim yok.

Örnek 1. Bu örnekte **Küme** kategorisinin tam olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{I}$ bir küçük kategori ve $F : \mathcal{I} \to$ **Küme** bir izleç olsun. Amacımız F'nin limitini bulmak. Bu amaçla,

$$D = \prod_{i \in \mathcal{I}} F(i)$$

yazalım, yani D ile F'nin ürettiği diyagramın köşelerinin kartezyen çarpımını gösteriyoruz. Ayrıca i-koordinatına izdüşümü π_i ile gösterelim. Limitimiz bu kümenin, koni olma üzelliğini de sağlayan bir alt kümesi olacak:

$$L = \{x \in D \mid \text{her } f : i \to j \text{ için } F(f)\pi_i(x) = \pi_j(x)\}$$

Şimdi iddiamız,

$$\lim_{\textbf{Küme}} F \cong (L, (\pi_i)_{i \in \mathcal{I}})$$

izomorfizmasının sağlandığıdır. Öncelikle sağ tarafın bir koni olduğu kurulumdan açıktır. Evrensellik için, F üzerinde $(K, (p_i)_{i \in \mathcal{I}})$ konisini alalım. Yukarıda tanımladığımız D kümesi bir çarpım olduğundan evrensellik özelliğini sağlar. Öyleyse, $p_i = \pi_i \circ \alpha$ eşitliğini sağlayan biricik $\alpha : K \to D$ fonksiyonu vardır. Şimdi her $k \in K$ ve $f : i \to j$ için,

$$F(f)\pi_i(\alpha(k)) = F(f)(p_i(x)) = p_j(x) = \pi_j(\alpha(x))$$

eşitlikleri sağlanır, yani α'nın görüntüsü D'nin içinde kalır. Bir diğer ifadeyle, $\alpha : (K, (p_i)) \to (L, (\pi_i))$ biricik fonksiyonunu bulmuş olduk.

🔔 Yukarıdaki örneği kullanıp **Grp**, **Rmod** ve **Top** kategorilerinin de tam olduğu gösterilebilir. Ek olarak tek yapmamız gereken, elde edilen objelerin gerçekten ilgili kategoride kaldığını göstermek olacak.

Alıştırma 1. *Benzer bir kurulum kullanıp* **Küme** *kategorisinin eş-tam olduğunu gösteriniz.*

Alıştırma 2. **Küme** *kategorisinin eş-tam olmasını kullanarak* **Grp**, **Rmod** *ve* **Top** *kategorilerinin de eş-tam olduğunu gösteriniz.*

Bir kategorinin tam olmasını kontrol etmenin alternatif bir yolunu kanıtlayalım.

Teorem 1. *$\mathcal{C}$ kategorisi verilsin. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

1. *$\mathcal{C}$ tamdır.*
2. *$\mathcal{C}$'de çarpımlar ve eşitleyiciler vardır.*

Bu teoremin kanıtı zor olmasa da burada vermeyeceğiz. İlgili okurlarımız kaynak kitaplarda bulabilir. Ayrıca bu sonucun karşıtı da bulunur, eş-tam olmayı eş-çarpım ve denkleştiricilerin varlığıyla ölçebiliriz.

Limitler hakkında bir diğer sonucumuz Yoneda Önsavı'nın değerini ortaya koyan sonuçlardan birisidir. Sonucumuz aşağıda:

Teorem 2. *$\mathcal{A}$ bir kategori ve $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ birer küçük kategori olsun. Ayrıca $F : \mathcal{D} \to [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ bir izleç olsun. Eğer her $C \in \mathcal{C}$ için,*

$$F_C : \mathcal{D} \to \mathcal{A}, \quad D \mapsto F(D)(C)$$

izlecinin limiti varsa F'nin de limiti vardır ve bu limit noktasal olarak hesaplanır.

Yukarıda sözü edilen "noktasal hesaplama" limitin bir nesnedeki değerinin bu nesnedeki değerlerin limiti olduğu anlamına geliyor. Kanıtta bu durum daha net görülecektir.

Bu yazı için asıl ilgi çekici olan teoremin bir sonucu:

Sonuç 1. *$\mathcal{A}$ bir tam kategori ve $\mathcal{C}$ bir küçük kategori olsun. Bu durumda $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ izleç kategorisi de tamdır ve limitler noktasal hesaplanır.*

Özel olarak, Yoneda Önsavı'nda olduğu gibi $\mathcal{A}$ = **Küme** aldığımızda, bu sonuç herhangi bir küçük kategorinin bir tam kategori içine gömülebileceğini söyler!

Şimdi teoremi kanıtlayalım.

Kanıt. Öncelikle, her ne kadar teoremin içinde açıkça verilmese de her $(f : D \to D') \in \mathcal{D}$ için,

$$F_C(f) = F(f)_C$$

olarak tanımlanır. Dikkat ederseniz,

$$F(f) : F(D) \to F(D')$$

bir doğal dönüşümdür ve dolayısıyla her $C \in \mathcal{C}$ için bir $(F(f)_C : F(D)(C) \to F(D')(C)) \in \mathcal{A}$ morfizması içerir.

Benzer şekilde, eğer $(g : C \to C') \in \mathcal{C}$ ise,

$$F_g : F_C \Rightarrow F_{C'}$$

doğal dönüşümünü de tanımlayabiliriz. Teoremde varlığını kabul ettiğimiz limiti,

$$\lim_{\mathcal{A}} F_C = (L(C), (p_{C,D})_{D \in \mathcal{D}})$$

olarak yazalım. Şimdi $(g : C \to C') \in \mathcal{C}$ morfizmasından gelen F_g doğal dönüşümü, $L(C)$ ve $L(C')$ limitleri arasında $L(g)$ ile göstereceğimiz bir morfizma verir:

$$L(g) : L(C) \to L(C')$$

Üstelik limitin evrenselliğinden dolayı bu morfizma,

$$p_{C',D} \circ L(g) = F(D)(g) \circ p_{C,D}$$

eşitliğini de sağlar. Dolayısıyla $L : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ bir izleçtir ve $(p_{C,D})_{C \in \mathcal{C}}$ koleksiyonu $p_{-,D} : L \Rightarrow F(D)$ bir doğal dönüşümdür.[1]

Bu kurulumlarla birlikte iddiamız,

$$\lim_{[\mathcal{C},\mathcal{A}]} F = (L, (p_{-,D})_{D \in \mathcal{D}})$$

eşitliğinin sağlandığıdır. Bu iddiayı daha açık yazarsak,

$$\lim_{[\mathcal{C},\mathcal{A}]} F(C) = \lim_{\mathcal{A}} F_C$$

elde ederiz. Bu ifade aynı zamanda noktasal hesaplama kavramımıza da açıklık getiriyor.

Şimdi iddiamızı kanıtlayalım. Öncelikle L'nin F üzerinde bir koni olduğunu göstermeliyiz. Eğer $(f : D \to D') \in \mathcal{D}$ ise her $C \in \mathcal{C}$ için,

$$F(f)(C) \circ p_{C,D} = p_{C,D'}$$

eşitliği tanımımızdan doğrudur, yani

$$F(f) \circ p_{-,D} = p_{-,D'}$$

olur. Evrensellik için, F üzerinde başka bir koni, $(K, (k_D)_{D \in \mathcal{D}})$ alalım. Bu durumda her $C \in \mathcal{C}$ için $(K(C), (k_{D,C})_{D \in \mathcal{D}})$ de F_C üzerinde bir koni olur ve dolayısıyla biricik $\rho_C : K(C) \to L(C)$ morfizması vardır. Bu morfizma $p_{C,D} \circ \rho_C = k_{D,C}$ eşitliğini sağlar. Öyleyse,

$$\rho = (\rho_C)_{C \in \mathcal{C}} : K \Rightarrow L$$

doğal dönüşümünü buluruz. (Okuyucular,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "g"] & K(C) \arrow[r, "\rho_C"] \arrow[d, "K(g)"'] & L(C) \arrow[d, "L(g)"] \\ C' & K(C') \arrow[r, "\rho_{C'}"] & L(C') \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğunu, tanımları takip ederek kolayca gösterebilir.) Tanımımızdan dolayı $p_{-,D}\rho = k_D$ sağlanır ve ρ_C morfizmalarının biricik olması ρ'nun da biricik olmasını zorunlu kılar. Böylece kanıtımız tamamlanmış oldu. □

[1]Burada yer tasarrufu için kontrol etmediğimiz detayları okuyucunun kontrol etmesini bekliyoruz!

Kategoriler Teorisi

Grothendieck Grupları ☺☺

Olcay Coşkun
Boğaziçi Üniversitesi
olcaycoskun@gmail.com

Cebirin en temel nesnelerinden biri abel gruplarıdır. Bu gruplar halka, cebir, modül, vektör uzayı gibi birçok nesnenin de temelini oluşturur. Yine de abel grupları "doğal" olarak ortaya çıkmazlar. Bu yazımızda abelyen grup kurmak için kullanılan bir teknikten söz edeceğiz. "Grup tamlaması", "Grothendieck kurulumu" gibi çeşitli isimleri olan bu teknik aslında çok temel bir fikirden ibaret.

Yazımızın ikinci bölümünde simetrik monoidal kategorilerin Grothendieck gruplarından bahsedeceğiz. İyi bilinen temel bir kurulumun *kategorifikasyonunu* elde etmiş olacağız.

Doğal Sayılardan Tamsayılara.

> "Tanrı doğal sayıları yarattı; geri kalan her şey insan işidir."

Leopold Kronecker'in (1823–1891) bu sözü çok meşhurdur. Bazen "sayma sayıları" adını da verdiğimiz doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ tüm aritmetiğin de temelidir. Toplama ve çarpma işlemleri doğal sayılar kümesinde doğal olarak tanımlanmışlardır. Matematiksel olarak bu kümeyi "Peano belitleri" kullanarak üretebiliriz.

Biz de yukarıda bahsettiğimiz tekniği doğal sayılardan tamsayıları üreterek anlatmaya başlayalım. Öncelikle abel grubu tanımını hatırlayalım.

Tanım 1. A bir küme ve $+ : A \times A \to A$ bir ikili işlem olsun. $(A, +)$ ikilisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu ikiliye bir *abel grubu* denir.

1. Her $a, b, c \in A$ için $a+(b+c) = (a+b)+c$ eşitliği sağlanır.
2. A içinde öyle bir e elemanı vardır ki her $a \in A$ için $a + e = a = e + a$ eşitliği sağlanır.
3. Her $a \in A$ için $a + b = e$ eşitliğini sağlayan bir $b \in A$ bulunur.
4. Her $a, b \in A$ için $a + b = b + a$ sağlanır.

Bu tanım sağlandığında,

($\star$) + işlemine A'nın *toplama işlemi* deriz.

($\star$) e elemanı biriciktir (kanıtını ödev olarak bırakıyoruz). Geleneksel olarak e yerine 0 yazarız ve *birim eleman* olarak adlandırırız.

($\star$) Benzer şekilde her a için yukarıdaki dördüncü koşulu sağlayan biricik b vardır. Bu elemanı $-a$ ile gösteririz ve a'nın *tersi* olarak adlandırırız.

Koşulları sağlayan en temel örnek tamsayılar kümesi ve toplama işlemidir. Ancak amacımız bu kümeyi kurmak olduğu için başka iki örnek verelim.

Örnek 1. $A = \{\bullet\}$ bir elemanlı küme olsun. Toplama işlemini $\bullet + \bullet = \bullet$ olarak tanımlarsak A bir abelyen grup olur. Yukarıdaki geleneği takip edersek $A = \{e\}$ yazarız.

Örnek 2. $A = \{\bullet, \star\}$ iki elemanlı küme olsun. Toplama işlemini tanımlamak için $\bullet+\bullet, \bullet+\star$ ve $\star + \star$ tanımlarını yapmalıyız. Sonuçta abelyen grup elde etmek istediğimiz için elemanlardan biri birim eleman olmalı. $\bullet$ ile $\star$ arasında bir fark gözetmediğimizden, $\bullet$'yı birim eleman olarak seçelim, yani,

$$\bullet + \bullet = \bullet$$

olsun. Dolayısıyla $\bullet + \star = \star$ eşitliği de sağlanmış olur. Geriye sadece $\star + \star$ işlemi kaldı. Aynı zamanda $\star$'ın tersini de belirlemeliyiz. Dikkat edilirse yukarıdaki eşitlik $\bullet$'nın tersinin $\bullet$ olduğunu da söylüyor. Bu durumda $\star$'ın tersi $\bullet$ olamaz, yani $\star$ olmalı. Öyleyse $\star + \star = \bullet$ olur. Özetlersek $A = \{0, \star\}$ kümesi $\star = -\star$ eşitliğinin sağlandığı abelyen grup olur.

Şimdi grup kurma tekniğimize dönelim. Amacımız grup kurmak olduğundan daha ilkel, ama dolayısıyla daha doğal bir tanımla başlamamız gerekli.

Tanım 2. N kümesi ve $+ : N \times N \to N$ ikili işlemi verilsin. $(N, +)$ ikilisi Tanım 1'deki (1) ve (2) koşullarını sağlıyorsa bu ikiliye *tekçe* denir.

Başka bir ifaleyle, tekçe, üzerindeki işlemin birleşme özelliğini sağladığı ve birim elemanı olan bir yapıdır. Bu yapıda ters elemanlar olmak zorunda değildir.

Örnek 3. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ toplama işlemiyle birlikte tekçedir.

Örnek 4. Her abel grubu aynı zamanda bir tekçedir.

Bu iki örneğimizde ortak olan bir özellik daha var: Sadeleştirme özelliği. Daha açık bir ifadeyle, bir tekçe M'nin *sadeleştirme özelliğine sahip olması*, her $m, n, t \in M$ için,

$$m + t = n + t \implies m = n$$

önermesinin sağlanması demektir. Bu noktadan sonra sadece sadeleştirme özelliği olan tekçelerle ilgileneceğiz.

Yazının geri kalanındaki tüm tekçeler değişmeli olacak ve tüm tekçelerde sadeleştirme özelliği sağlanacak.

Grup kurmanın anlamlı olması için doğal sayılar tekçesinden tam sayılar grubunu elde etmeyi beklemek doğaldır. İlk bakışta bunun için tek yapmamız gerekenin negatif sayıları eklemek olduğu düşünülebilir. Ancak amacımız sadece kümeyi değil aynı zamanda toplama işlemini de genişletme! Bu beklentiyi matematiksel olarak ifade edelim.

Tanım 3. $(M, +)$ tekçesinin *grup tamlaması* bir abel grubu A ve tekçe yapısını koruyan $\phi : M \to A$ fonksiyonundan oluşan (A, ϕ) ikilisidir. Bu ikili aynı zamanda aşağıdaki evrensellik koşulunu sağlar.

Tanımda yeni bir terim ve bir kavram kullandık. Cebirsel yapılara aşina olanlar yapı koruyan fonksiyonlara, ya da mofizmalara aşinadır. İki tekçe M ve N ve aralarında bir fonksiyon $f : M \to N$ verildiğinde eğer

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$$

eşitliği tüm $m_1, m_2 \in M$ için sağlanıyorsa f'nin *tekçe yapısını koruduğunu* söyleriz. Daha yaygın kullanılan isim *tekçe morfizması*dır. Bu bilginin ışığında yukarıdaki tanıma tekrar bakarsak, M'nin A içinde bir kopyasının olmasını ve A'nın toplama işleminin M'nin bu kopyasına kısıtlamasının M'nin toplamasına eşit olmasını bekliyoruz.

Yeni kavramımızsa *evrensellik* idi. Bir önceki cümlemizi düşünürseniz, verilen koşulu sağlayan birden fazla abel grubu olabilir. Tüm olası örnekler içinden özel bir seçim yapmalıyız.

Temel örneğimiz tamsayılar grubu olacak. Ama örneğin rasyonel sayılar ya da gerçel sayılar da doğal sayıları içerir ve toplama işlemini de genişletir. Yani "en iyiyi seçme" yöntemimiz olmadan tanımımız kullanışsızdır. Evrenselliğe daha sonra dönmek üzere varlık sorusuyla devam edelim.

Amacımız bir tekçe verildiğinde Tanım 3'te öngörülen abel grubu kurmak. Bu kurulum için değişik yaklaşımlar geliştirmek mümkün olsa da bu yazıda denklem çözümleri yaklaşımını takip edeceğiz. $(M, +)$ bir tekçe olsun. Toplama işlemine göre ters elemanlar olmayabileceği için her $a, b \in M$ için,

$$x + a = b$$

denkleminin (M kümesi içinde) bir çözümü olmayabilir. Eğer M'yi bir abel grubunun içinde görmeyi hedefliyorsak en azından bu denklemlerin çözümlerini içeren bir küme bulmalıyız. Öyleyse böylesi denklemlerin çözümlerini içeren soyut bir küme kurmayı deneyelim.

İlk olarak denklemler kümesini ele alalım. Dikkat ederseniz her denklem $a, b \in M$ olmak üzere bir (a, b) ikilisi tarafından biricik belirlenir. Dolayısıyla ilgilendiğimiz denklemler kümesi aslında,

$$M \times M = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$$

kümesidir.

Peki çözümleri nasıl belirleyeceğiz? Her ne kadar ikililer denklemleri biricik belirlemiş olsa da çözümleri biricik belirlemezler. Örneğin doğal sayılar kümesinde,

$$x + 1 = 4 \text{ ve } x + 2 = 5$$

denklemlerinin çözümleri aynıdır. Dolayısıyla çözümler kümesi $M \times M$ ile eşleştirilemez.

Biz her olası çözümden bir kopya istiyoruz, aynı elemanın sonsuz kopyası kullanışsız olurdu. Öyleyse aynı çözüme sahip denklemleri göz ardı etmeliyiz. Bir şeyleri göz ardı etmenin matematiksel yollarından birisi denklik bağıntısı tanımlamaktır.

Tanım 4. Denklemler kümesi $M \times M$ üzerinde $\equiv$ denkliği,

$$(x + a = b) \equiv (x + c = d) \leftrightarrow b + c = a + d$$

kuralıyla tanımlanır.

Tanım 4'te gizli olarak sadeleştirme özelliğini kullandığımızı not edelim. Bu özelliğin olmadığı durumlarda denklik koşulu bazı $m \in M$ için $b+c+m = a+d+m$ olarak verilmelidir.

Diğer taraftan verilen denklik altında sadece ve sadece çözümleri aynı olan denklemlerin eşlendiği açıktır. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek kolaydır. Okuyucuya ödev olarak bırakalım. Her $(a,b) \in M \times M$ için (a,b) elemanını içeren denklik sınıfını $[a,b]$ ile gösterelim, yani,

$$[a,b] = \{(a',b') \,|\, a+b' = a'+b\}$$

olsun. Denklik sınıflarının kümesiniyse $\tilde{M}$ ile gösterelim ve yeni bir toplama işlemi tanımlayalım:

$$\tilde{+} : \tilde{S} \times \tilde{S} \to \tilde{S};\ [a,b]\tilde{+}[c,d] = [a+c, b+d]$$

Bu işlemin düzgün tanımlı olduğu gösterilmelidir, yani, eğer $[a',b'] = [a,b]$ ve $[c',d'] = [c,d]$ ise bu durumda $[a'+c', b'+d'] = [a+c, b+d]$ olmalı. Bu kanıtı da okuyucuya alıştırma olarak bırakalım.

Sıradaki iddiamız $(\tilde{M}, \tilde{+})$'nın bir abelyen grup olduğudur. İlk olarak, $\tilde{+}$'nın birleşme ve değişme özelliklerine sahip olduğu aşikârdır. Öyleyse sadece birim eleman ve ters eleman bulmalıyız.

İddia 1. $\tilde{+}$ işleminin birim elemanı $[x,x]$ sınıfıdır.

Gerçekten de her $[a,b] \in \tilde{M}$ için $[a,b]\tilde{+}[x,x] = [a+x, b+x]$ olur. Denklik tanımımıza göre $(a,b) \sim (a+x, b+x)$ olacaktır, dolayısıyla $[a,b]\tilde{+}[x,x] = [a,b]$ elde ederiz. Burada ayrıca her $x,y \in S$ için $[x,x] = [y,y]$ olacağını da gözleyelim.

İddia 2. $[a,b] \in \tilde{M}$'nin tersi $[b,a]$'dır.

Bu iddianın kanıtı da kolay:

$$[a,b] \,\tilde{+}\, [b,a] = [a+b, a+b].$$

Böylece $\tilde{M}$'nin bir abelyen grup olduğunu göstermiş olduk. Tamsayılar grubu için denklem çözme özelliğini hatırlayalım. Bu özellik $\tilde{M}$'de olacak. Aslında buradaki önemli nokta $\tilde{M}$'nin bir grup olmasıdır.

Şimdi kurulumumuzun *evrensellik* özelliğini tartışabiliriz. Şöyle ki M kümesinden $\tilde{M}$ kümesine bir fonksiyon tanımlayabiliriz: $t \in M$ seçip sabitleyelim ve

$$\phi : M \to \tilde{M},\ a \mapsto [t, a+t]$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her ne kadar bir seçim yaparak başlamış olsak da tanımımız bu seçimden bağımsızdır; çünkü herhangi bir başka $t' \in M$ için $[t, a+t] = [t', a+t']$ eşitliği sağlanır.

Bu fonksiyon birebirdir. Gerçekten de $a,b \in M$ için $\phi(a) = \phi(b)$ olması durumunda,

$$[t, a+t] = [t, b+t] \iff a+t+t' = b+t+t'$$

elde ederiz ve M'de sadeleştirme kuralı geçerli olduğundan son eşitlik bize $a = b$ verir. Birebir ϕ fonsiyonuyla M kümesini $\tilde{M}$'nin bir alt kümesi gibi görebiliriz. Dahası ϕ fonksiyonu toplama işlemini korumaktadır: $a,b \in M$ verildiğinde,

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= [t, a+b+t] \\ &= [t+t, a+b+t+t] \\ &= [t, a+t] \,\tilde{+}\, [t, b+t] \\ &= \phi(a) \,\tilde{+}\, \phi(b) \end{aligned}$$

olur. Bir diğer ifadeyle, $\tilde{M}$ abelyen grubunun toplama işlemi M tekçesinin toplama işlemini genişletmektedir. Henüz evrensellik özelliğine ulaşamadık. Bu amaç için yukarıdaki her iki özelliği de sağlayan başka bir abelyen grup - fonksiyon ikilisi $\psi : M \to A$ verilsin. Daha açık bir yazımla,

1. A bir abelyen grup,
2. $\psi : M \to A$ birebir fonksiyon olsun ve
3. her $a,b \in M$ için $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ sağlansın.

Bu durumda,

$$\psi = \Phi \circ \phi$$

şartını sağlayan biricik $\Phi : \tilde{M} \to A$ grup dönüşümü bulunur. Bu özelliği bir diyagram üzerinde gösterelim:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \tilde{M} \arrow[d, dashed, "\exists\Phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Şimdi $\tilde{M}$'nin evrenselliği ortaya çıkmış oldu: $\tilde{M}$ abelyen grubu, M tekçesinin toplama işlemini genişletir ve bu genişletme özelliğini sağlayan tüm abelyen gruplara $\tilde{M}$'den biricik grup dönüşümü vardır.

Yukarıdaki tarifimizin evrensellik özelliğini sağladığını gösterelim: (A, ψ) ikilisi verildiğinde $\Phi : \tilde{M} \to A$ morfizmasını bulmalıyız. Tanımı daha anlaşılır kılmak için önce $\tilde{M}$ kümesini daha iyi tanıyalım.

Tekçe M'nin elemanlarını $\tilde{M}$ içinde görebileceğimizi söylemiştik. Peki geriye kalan elemanlar hangi formda olacak? $a \in M$'yi $[t, a+t] \in \tilde{M}$ ile eşlemiştik. Bundan sonra $\tilde{a} = [t, a+t]$ yazalım (daha sonra gösterimi sadeleştireceğiz). İddia 2'den $-\tilde{a} := [t+a, t]$ yazabiliriz. Böylece $\tilde{M}$ içinde iki tür eleman belirlemiş olduk:

- $M := \{\tilde{a} = [t, a+t] \,|\, a \in S\}$
- $-M := \{-\tilde{a} = [a+t, t] \,|\, a \in S\}$

Bu gösterimle birlikte her $[a,b] \in \tilde{M}$ elemanını,

$$[a,b] = [a+t,t] \tilde{+} [t,t+b] = \tilde{a} \tilde{+} (-\tilde{b})$$

olarak yazabiliriz, yani $\tilde{M}$'nin sıfırdan farklı her elemanını M ve $-M$'nin elemanlarının toplamı olarak yazabiliriz. Artık, ($\tilde{M}$ dışındaki) tildaları kaldırarak gösterimimizi sadeleştirebiliriz, yani $\tilde{a}$ yerine a, $\tilde{+}$ yerine de $+$ yazalım. Ayrıca $a + (-b)$ yerine de $a - b$ yazalım. Her ne kadar karışıklık çıkabilir gibi görünse de bu hiçbir zaman olmayacak!

> **Sonuç 1.** *$\tilde{M}$ abelyen grubunun her elemanı M ve $-M$ kümelerinden birer elemanın toplamı olarak yazılabilir.*

Bu noktada yukarıdaki evrensellik kanıtımıza dönebiliriz. Amacımız $\Phi : \tilde{M} \to A$ grup dönüşümünü tanımlamaktı: $a - b \in \tilde{M}$'nin görüntüsü,

$$\Phi(a-b) = \psi(a) - \psi(b)$$

olsun. Bu tanımın yukarıda verilen üçgeni değişmeli yaptığı açıktır. Eğer Φ' aynı özelliğe sahip başka bir grup morfizması olsaydı, üçgenin değişmeli olması dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \Phi'(a-b) &= \Phi'(a) - \Phi'(b) \\ &= \Phi'(\phi(a)) - \Phi'(\phi(b)) \\ &= \psi(a) - \psi(b) \end{aligned}$$

eşitlikleri doğru olurdu. Dolayısıyla $\Phi' = \Phi$ elde ederiz, yani üçgeni değişmeli yapan biricik Φ morfizması vardır.

Evrensellik özelliğinin hızlı bir sonucu grup tamlamasının, izomorfik kopyalar göz ardı edildiğinde, biricik olduğudur: Eğer $(\tilde{M}, \phi)$ ile aynı evrensellik özelliklerini taşıyan başka bir (G, λ) ikilisi alırsak, hem $\tilde{M}$'den G'ye hem de G'den $\tilde{M}$'ye giden ve ilgili üçgenleri değişmeli yapan grup homomorfizmaları buluruz. Bu homomorfizmaların bileşkeleri birim fonksiyon olmalıdır! (Okuyucu ödev olarak bu iddiayı kanıtlamalıdır. Homomorfizmaların biricik olmasının kritik olduğunu hatırlatalım.)

Böylece sadeleştirme özelliğine sahip her değişmeli tekçeyi içeren evrensel bir abel grubu kurmuş olduk.

> **Tanım 5.** Sadeleştirme özelliğine sahip değişmeli M tekçesinin *Grothendieck grubu* yukarıda kurulumu verilen $\tilde{M}$ abel grubudur.

Temel örneğimiz M tekçesinin doğal sayılar tekçesi $\mathbb{N}$ olduğu durumdur. Elde edeceğimiz Grothendieck grubun tamsayılar grubu $\mathbb{Z}$ olacağı da kolaylıkla gösterilebilir.

> **Alıştırma 1.** *Doğal sayılar tekçesi $\mathbb{N}$'nin Grothendieck grubunun tamsayılar grubu $\mathbb{Z}$ olduğunu kanıtlayın.*

> **Alıştırma 2.** *Pozitif tamsayıların çarpım tekçesi $(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$'ın Grothendieck grubunun pozitif rasyonel sayıların çarpım grubu $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ olduğunu kanıtlayın.*

Sadeleştirme özelliğinin önemini daha iyi kavramak amacıyla yapay bir örneğe göz atalım. Bu amaçla $M = \mathbb{Z}$ kümesi üzerinde,

$$a * b = \max\{a,b\}$$

işlemini tanımlayalım. $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisinin değişmeli tekçe olduğu açıktır.

İlk olarak sadeleştirme özelliğinin bulunmadığını görelim. Bir örnek yeterli olacak:

$$1 * 5 = 5 = 2 * 5$$

eşitlikleri sağlanırken $1 \neq 2$ olduğundan sadeleştirme yapamayız.

Şimdi Grothendieck grubu belirlemeye çalışalım. Bunun için $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesi üzerindeki denkliği tarif edelim. Tanımı uyguladığımızda,

$$(a,b) \equiv (c,d) \leftrightarrow \max\{b,c\} = \max\{a,d\}$$

olmasını bekleriz. İki gözlemimiz var:

(i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $(a,a) \equiv (b,b)$ sağlanır.

(ii) Her (a,b) ikilisi için

$$(a,b) \equiv (\max\{a,b\}, \max\{a,b\})$$

olur.

Sonuç olarak her (a,b) ikilisinin $(0,0)$ ikilisine denk olduğunu buluruz, yani Grothendieck grubu sadece bir elemanlı $\{[0,0]\}$ grubu olmalıdır. Sonsuz bir tekçeyle başlamış olmamıza karşın sadece bir elemanlı abel grubuyla bitirmiş olduk!

Kategorilerin Grothendieck grubu

Grup tamlaması fikrini kategoriler düzeyinde yapmak mümkündür. İlk olarak nesneler üzerinde bir tekçe yapısına ihtiyaç olduğu açıktır. Bu yapıya ulaşmak için çalışacağımız kategorinin bazı özellikleri olmalıdır. Bu bölümde Grothendieck kurulumu yapabileceğimiz örnekler göreceğiz.

Simetrik Monoidal Kategoriler

Bu bölümde nesnelerinin eşyapı sınıfları üzerinde tanımlanabilecek bir izleçle donatılmış kategorilere göz atalım.

Tanım 6. $\mathcal{S}$ kategorisi ve $\cdot : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ izleci verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathcal{S}$'ye *simetrik monoidal kategori* denir.

- Aşağıdaki koşulu sağlayan bir $x \in \mathcal{S}$ nesnesi vardır: Her $x \in \mathcal{S}$ için,

$$e \cdot x \cong x, \quad x \cdot e \cong x$$

doğal izomorfizmaları vardır.

- Her $x, y, z \in \mathcal{S}$ için,

(i) $x \cdot y \cong y \cdot x$

(ii) $x \cdot (y \cdot z) \cong (x \cdot y) \cdot z$

doğal izomorfizmaları sağlanır.

Simetrik monoidal kategoriler yaygındır. Çarpma işlemi için en doğal aday direkt toplamlardır. Örneğin herhangi bir cisim $\mathbb{F}$ verildiğinde, $\mathbb{F}$-vektör uzayları kategorisi direkt toplam altında simetrik monoidal olur. Benzer şekilde bir halkanın projektif modüllerinin[1] kategorisi de simetrik monoidaldır.

Daha genel olarak eğer $\mathcal{C}$ kategorisinde sonlu çarpımlar varsa bu çarpımla, eğer sonlu eş-çarpımlar varsa bu eş-çarpımla kategoriye simetrik monoidal yapısı eklenir.

Şimdi $\mathcal{S}$ simetrik monoidal bir kategori olsun. Bu kategorinin nesneleri küme olmak zorunda değil, ama eşyapı sınıflarının bir küme oluşturduğunu varsayalım. Bu kümeyi $\mathfrak{S}$ ile gösterelim, yani,

$$\mathfrak{S} = \{[x] \mid x \in \mathcal{S}\}$$

olsun. Bu durumda $\cdot$ izleci $\mathfrak{S}$ üzerinde bir işlem verir. Bu işlem için aynı gösterimi kullanalım:

$$\cdot : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}, \quad ([x],[y]) \mapsto [x \cdot y]$$

Şimdi yukarıdaki eşitlikleri eşyapı sınıfları için tekrar yazalım. Nesneleri sınıflarla, izomorfizmaları eşitlikle değiştireceğiz.

- Her $[x] \in \mathfrak{S}$ için,

$$[e]\cdot[x] = [x], [x]\cdot[e] = [x]$$

eşitliğini sağlayan bir $[e] \in \mathfrak{S}$ bulunur.

- Her $[x],[y],[z] \in \mathfrak{S}$ için,

(i) $[x]\cdot[y] = [y]\cdot[x]$

(ii) $[x]\cdot([y]\cdot[z]) = ([x]\cdot[y])\cdot[z]$

eşitlikleri sağlanır.

Bu işlemin $\mathfrak{S}$ kümesini bir değişmeli tekçe yaptığı açıktır.

Tanım 7. Simetrik monoidal kategori $(\mathcal{S},\cdot)$'nın Grothendieck grubu $(\mathfrak{S},\cdot)$ değişmeli tekçesinin Grothendieck grubu olarak tanımlanır ve $K_0(\mathcal{S}) := K_0(\mathcal{S},\cdot)$ ile gösterilir.

Simetrik monoidal kategoriler Grothendieck kurulumu için en temel örneği vermektedir. Aslında ilk bölümdeki doğal sayılar örneğimizi bu bağlamda yeniden kurabiliriz. Sonlu kümeler kategorisini **SnlKm** ile gösterilim. Bu kategorideki izomorfizmalar birebir ve örten fonksiyonlar olacaktır. Dolayısıyla sonlu küme X'in eşyapı sınıfı X ile aynı sayıda eleman içeren tüm kümeler olacaktır, yani

$$[X] = \{Y \in \mathbf{SnlKm} \mid |X| = |Y|\}$$

olur. Eğer $|X| = n$ ise $[X]$ sınıfını n sayısıyla göstermemiz mümkündür. Dolayısıyla eşyapı sınıfları kümesini doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile eşlemiş oluruz.

Diğer taraftan **SnlKm**'yi simetrik monoidal yapmanın bir yolu ayrık birleşim işlemidir:

$$\sqcup : \mathbf{SnlKm} \times \mathbf{SnlKm} \to \mathbf{SnlKm}, (X,Y) \mapsto X \sqcup Y$$

tanımının ürettiği izleç yukarıdaki koşulları sağlamaktadır. (Ödev!) Aynı zamanda tüm sonlu kümeler X ve Y için,

$$|X \sqcup Y| = |X| + |Y|$$

eşitliğinin sağlandığı da açıktır. Öyleyse $\sqcup$ izlecinin eşyapı sınıflarında ürettiği tekçe işlemi, eşyapı sınıflarını doğal sayılarla eşlediğimizde doğal sayılar üzerideki toplama işlemiyle eşleşir! Dolayısıyla,

$$K_0(\mathbf{SnlKm}) = \mathbb{Z}$$

buluruz.

Benzer bir sonuca sonlu kümeler yerine bir cisim üzerindeki sonlu boyutlu vektör uzaylarının kategorisiyle de ulaşabilirdik.

Alıştırma 3. $\mathbb{F}$ *bir cisim ve* **FVek** *sonlu boyutlu F-vektör uzaylarının kategorisi olsun.*

$$K_0(\mathbf{FVek}) \cong \mathbb{Z}$$

olduğunu gösteriniz.

Sıradaki örneğimiz için G-kümelerin kategorisini düşüneceğiz. Bu örnek için grup etkileri hakkında temel bilgilerin bilindiğini varsayacağız. Bu konuları bilmeyen okurlarımız sıradaki bölüme geçebilir. Bir alıştırmayla başlayalım:

[1] Bir modülün projektif olması, serbest bir modülün direkt çarpanı olmasına denktir.

Alıştırma 4. *G sonlu grup olmak üzere sonlu G-kümelerin kategorisi G-**Küme**'nin ayrık birleşim altında simetrik monoidal olduğunu gösteriniz.*

Şimdi G-**Küme** kategorisinin Grothendieck grubunu belirleyelim. G-kümelerin izomorfizma sınıflarının kümesini $\mathcal{M}$ ile gösterelim. Ayrık birleşim bu küme üzerinde bir tekçe yapısı verir:

$$\sqcup : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad ([X],[Y]) \to [X \sqcup Y]$$

Şimdi X bir G-küme olsun ve X/G ile X'in G-yörüngelerinin temsilcilerini gösterelim. O zaman,

$$X = \bigsqcup_{x \in X/G} G \cdot x$$

eşitliği doğrudur. Burada $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ ile x'in yörüngesini gösteriyoruz. Genel G-küme teorisinden, $x \in X$ ise $G \cdot x \cong G/G_x$ izomorfizmasının varlığını biliyoruz. Burada $G_x \leq G$ ile x'in G'deki sabitleyicisini gösteriyoruz. Dolayısıyla, $\mathcal{M}$ tekçesinde,

$$[X] = \sum_{x \in X/G} [G/G_x]$$

eşitliği sağlanır. Yine genel teoriden, her $H, H' \leq G$ için,

$$G/H \cong G/H' \leftrightarrow \exists g \in G : H = gH'g^{-1}$$

sağlanır. Yani iki yörüngenin eş-yapılı olması için gerek ve yeter koşul bu yörüngedeki elemanların sabitleyici altgruplarının eşlenik olmasıdır. Sonuç olarak $\mathcal{M}$'deki her bir elemanın G/H formundaki elemanların toplamı olarak yazılabileceğini görmüş olduk. Öyleyse, eğer G'nin altgruplarının eşlenik sınıflarının sayısı k ise,

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{N}^k$$

izomorfizmasını elde etmiş oluruz. Bu sonuçla birlikte Grothendieck grubunu hesaplayabiliriz:

Alıştırma 5.

$$K_0(G\text{-}\mathbf{K\ddot{u}me}) \cong \mathbb{Z}^k$$

olduğunu gösteriniz.

Tanım 8. G-**Küme** kategorisinin Grothendieck grubu $B(G)$ ile gösterilir ve G'nin *Burnside grubu* olarak adlandırılır.

Burnside grubunun elemanlarını iki G-kümenin farkı gibi görebiliriz, yani $x \in B(G)$ ise,

$$x = [X] - [Y]$$

olacak şekilde iki G-küme X, Y bulabiliriz. Eğer Y boş küme değilse, x gerçek bir G-küme değildir. Bu tür elemanlara *sanal* G-küme denir.

Benzer bir hesabı G'nin temsillerinin kategorisi $\mathbb{C}G$-**mod** için de yapabiliriz. 2023-3 sayımızda sonlu grup temsillerini çalıştık. Hatırlanırsa, G'nin her $\mathbb{C}$-temsili yarı-basitti. Yani $\mathrm{Irr}(G) = \{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$ basit $\mathbb{C}G$-temsillerinin izomorfizma sınıflarının temsilcileri olmak üzere her $\mathbb{C}$-temsili V'yi,

$$[V] = \sum_{i=1}^{l} n_i [S_i], \quad n_i \in \mathbb{N}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki tanımlarımızı düşünürsek, $\mathbb{C}G$-**mod**'un simetrik monoidal olduğunu ve izomorfizma sınıflarının kümesi $\mathcal{N}$'nin direkt toplam altında bir tekçe olduğunu söylemiş olduk. Dolayısıyla $\mathcal{N} \cong \mathbb{N}^l$'dir. Burada l ile G'nin basit temsillerinin sayısını gösteriyoruz. Bu sayı G'nin elemanlarının eşlenik sınıflarının sayısına eşittir. Bir önceki hesaplarımızda olduğu gibi,

$$K_0(\mathbb{C}G\text{-}\mathbf{mod}) \cong \mathbb{Z}^l$$

buluruz.

Tanım 9. $\mathbb{C}G$-**mod** kategorisinin Grothendieck grubu $\mathcal{R}(G)$ ile gösterilir ve G'nin *temsil grubu* ya da *karakter grubu* olarak adlandırılır.

Not 1. Daha genel olarak abel kategorilerinin ve tam kategorilerin[2] de Grothendieck gruplarını tanımlamak mümkündür. Giriş yazılarımızı tamamlayan ilgili okurlarımız bu kategorilerin tanımlarını da rahatlıkla öğrenebilir.

Not 2. Yukarıda bahsettiğimiz simetrik monoidal kategoriler ve başka ek koşullarla belirlenen kategoriler özellikle temsil kuramı için önemli araçlardır. Bu yazıda bahsettiğimiz Grothendieck grupları kategorilerin temsillerini çalışmak için bir yöntem sunar. Bu seviyede bir örneği açıklamak teknik bilgi gerektirse de bir sonraki yazımızda böyle bir örnek vereceğiz. Sabırlı okurlarımız kategorilerin problemleri soyutlamada nasıl kullanıldığını biraz da olsa hissedebilir!

[2]Buradaki "tam" kelimesini "exact" anlamında kullandık.

Kategoriler Teorisi

Temsiller Teorisinde Kategoriler

Olcay Coşkun
Boğaziçi Üniversitesi
olcaycoskun@gmail.com

Bu yazımızda kategoriler teorisinin yeni bir dil sunmanın ötesine geçip etkin olarak kullanıldığı bir örnek göstereceğiz. Bu örnek her ne kadar temsiller üzerinde olsa da görüleceği gibi temsillerle sınırlı değildir. Ayrıca temsiller teorisine tamamen farklı yaklaşımlar getiren başka örnekler de bulunmaktadır.

Bu yazıyı tam olarak anlamak için, doğal olarak çok miktarda ileri düzey teori bilmek gerekiyor. Hikâye okur gibi okunması için gayret göstereceğiz! Bu alandaki standart bir referans Serge Bouc'un *Biset functors for finite groups* (Springer Lecture Notes in Mathematics 1990) kitabıdır.

Temsiller hakkında detaylı bilgiler için 2023-3 sayımızın kapak konusunu okuyabilirsiniz. Temel tanımları tekrarlamayacağız.

G bir sonlu grup olsun. Temsiller teorisinin amacı G'nin matematiksel nesneler üzerindeki etkileri aracılığıyla grup hakkında bilgiler elde etmek. Bu arada ortaya çıkan ara problemleri çözmek de doğal hedefler arasında, hatta bazen bu problemler ana probleme de dönüşebilir. G'nin etki ettiği ilginç nesneler arasında kümeler, vektör uzayları, abel grupları ve çeşitli halkalar üzerindeki modüller sayılabilir.

Kategoriler teorisini dahil etmenin bir yolunu görmüştük: G-kümeler ya da genel olarak G-temsilleri gruba atanmış bir nesneli $\mathfrak{G}$ kategorisinden çıkan izleçlerle eşlenebiliyordu. Bu her ne kadar anlayışımızı güçlendirse de direkt olarak üzerinde çalışabileceğimiz nesneler vermez.

Hatırlarsanız,

$$G\textbf{-Küme} \simeq [\mathfrak{G}, \textbf{Küme}]$$

denkliğini kanıtlamış ve benzer fikirlerle,

$$\mathbb{G}\textbf{-Tem} \simeq [\mathfrak{G}, \mathbb{C}\textbf{Vek}]$$

denkliğinin kanıtlanabileceğini söylemiştik. Burada $\mathbb{G}$**-Tem** ile G'nin $\mathbb{C}$-vektör uzaylarındaki temsillerinin kategorisini gösteriyoruz. Bunu bir adım daha ileri götürüp,

$$\mathbb{G}\textbf{-Tem} \simeq [\mathfrak{G}, \mathbb{C}\textbf{Vek}] \simeq \mathbb{C}G\textbf{-mod}$$

denkliğini de ekleyebiliriz. Bu gösterimde $\mathbb{C}G$ ile G'nin $\mathbb{C}$ üzerindeki grup cebirini gösteriyoruz. Tüm bu denklikler grup özelinde verilmektedir. Grupları değiştirdiğimizde elde edeceğimiz kategoriler arasındaki izleçleri henüz görmüyoruz. Örneğin, $H \leq G$ ise G'nin etkisini H'ye kısıtlayıp G'nin temsillerinden H'nin temsillerine bir izleç elde edebiliriz.

Bu tür ilişkileri kullanıp grup temsillerinin tekil olarak verilmiş gruplardan bağımsız yapısını belirlemeyi deneyebiliriz. Bunun için kategorileri kullanacağız. Öncelikle ne tür ilişkileri göz önünde bulundurmak istediğimize karar vermeliyiz. İlk örnek $H \leq G$ ile gösterdiğimiz altgrup olma özelliğiydi. Bir diğer kolay ilişki bölüm gruplarını düşünmek olabilir: $N \trianglelefteq G$ ise G/N'ye G'nin bir bölüm grubu denir ve $G \to G/N, g \mapsto gN$ doğal homomorfizması bulunur. Bir diğer ifadeyle, G'nin temsilleriyle altgruplarının ve bölüm gruplarının temsillerini ilişkilendirebiliriz. Aslında bu ilişkileri düşünmek bütün gruplar arasındaki ilişkileri düşünmeye denktir; çünkü her homomorfizmayı içerme ve bölüm homomorfizmalarının bileşkesi olarak yazabiliriz. Şöyle ki $\phi : G \to K$ bir grup homomorfizması olsun. Aşağıdaki bileşkeyi yazabiliriz:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, "\phi"] \arrow[dr, two heads] & & & K \\
& G/\text{Çek } \phi \arrow[r] & \text{Gör } \phi \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Bir diğer gözlemimiz, bu homomorfizmaların ürettiği izleçlerle ilgili. Hatırlarsanız izleçler yazımızda modül kategorileri arasında bimodüllerin ürettiği izleçlerden bahsetmiştik. $H \leq G$ ve $G \to G/N$ morfizmalarını kullanıp bimodüller üretebiliriz. Hem notasyonu hem de sunumu kolaylaştırmak için sadece altgrupları düşünelim. Öncelikle $\mathbb{C}G$ ile bazı G kümesi olan $\mathbb{C}$-vektör uzayını gösterelim. Şimdi $\mathbb{C}G$ üzerindeki soldan ve sağdan H ve G ile çarpma etkilerini ele alırsak bu vektör uzayını hem $(\mathbb{C}G, \mathbb{C}H)$-bimodül hem de $(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$-bimodül olarak görebiliriz. Dahası bu bimodüllerle tensör çarpımının ürettiği izleçleri düşünebiliriz:

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} - : \mathbb{C}H\textbf{-mod} \leftrightarrows \mathbb{C}G\textbf{-mod} : \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} -$$

Sağdan sola giden izleç tam olarak G-etkisini kısıtlama izlecine karşılık gelirken diğeri H-modüllerden G-modüller üreten bir izleçtir (daha önce cebirsel tümevarım adını vermiştik).

Öyleyse bu izleçleri kullanırsak tüm grupların temsillerini ve bu temsiller arasında bu iki morfizmayı içeren devasa bir yapı kurabiliriz. Ama tüm bu yapıyı okuması zor olduğu gibi, çalışması da zordur. Daha kolay bir tarif vermek üzere bütün yapıyı tek bir izleç olarak görmek isteriz. Bunun için bir kategori kurmalıyız!

Kategorimizin nesnelerinin tüm sonlu gruplar sınıfı olacağı açık.[1] Kurmaya başlayalım:

- Kategorimizi $\mathscr{C}$ ile gösterelim.
- Nesneler sınıfı tüm sonlu gruplar olsun.

Peki morfizmalar neler olmalı? İdeal olarak temsilleri düşündüğümüzde yukarıda bahsettiğimiz bimodüllere dönüşecek morfizmalar seçmeliyiz. Bu bimodüllerin bir ortak özelliği hepsinin grup etkisi altında değişmez bazları olmasıdır. Öyleyse morfizmaları bu tür bazlar olarak seçebiliriz.

Halkaların iki taraftan etkisine izin verdiğimiz gibi grupların da iki yönden etkisine izin verebiliriz: G ve H sonlu gruplar ve X sonlu küme olsun. Eğer X üzerinde soldan G-etkisi ve bu etkiyle değişmeli sağdan H-etkisi varsa X'e (G,H)-*biküme* diyelim. Örneğin $H \leq G$ ise soldan ve sağdan çarpımlar G kümesini hem (G,H)-biküme hem de (H,G)-biküme yapar. Tüm (G,H)-bikümelerin grubu $B(G,H)$'yi düşünebiliriz, bu kurulum teknik olduğundan burada yer vermeyeceğiz. Okuyucu bu grubu tüm olası bikümeleri içeren bir yapı olarak düşünmeli.[2] Bu gösterimle,

- G, H arasındaki morfizmalar,

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(G,H) = B(H,G)$$

  grubu olsun.

Kategorinin tamamlanması için bileşkeye ihtiyacımız var. Bu bileşkenin tanımını, hikâyemize katkısı olmayacağından, burada vermeyeceğiz, ama şunu belirtelim: Bikümeleri, bimodüllerin özü olarak düşündük. Bileşke de aynı şekilde tensör çarpımının ilkel bir versiyonu olarak tanımlanır. O zaman kategorimiz $\mathscr{C}$'yi tanımladığımızı söyleyebiliriz.

Şimdi bu kategoriyle yukarıda bahsettiğimiz devasa yapıyı anlamlandıracağız. İlk olarak tüm temsilleri düşünmek yerine $\mathbb{C}G$-modüllerin Grothendieck grubu $\mathcal{R}(G)$'yi alalım. Şimdi,

$$\mathcal{R} : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$$

izlecini grup G'yi $\mathcal{R}(G)$'ye götüren izleç olarak tanımlayalım. Bir (G,H)-biküme X verildiğinde, yani $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(H,G)$ verildiğinde, $\mathbb{C}X$ vektör uzayını bir $(\mathbb{C}G, \mathbb{C}H)$-bimodül yapıp $\mathbb{C}X \otimes_{\mathbb{C}H} -$ izlecini ve

$$\mathcal{R}(X) : \mathcal{R}(H) \to \mathcal{R}(G)$$

grup homomorfizmasını elde ederiz. Bir araya getirdiğimizde $\mathcal{R}$ izlecini oluşturduk. Dikkat ederseniz bu izleç tüm sonlu grupların tüm temsillerinin bilgisini içerdiği gibi bikümelerden gelen ilişkileri de tarif ediyor.

Yukarıda yaptığımız hâlâ yeniden adlandırma! Zaten bildiğimiz bir yapıyı yeni bir yolla tarif ettik. Bir yenilik şurada: Sadece $\mathcal{R}$ izlecini değil de tüm $\mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ izleçlerini düşünebiliriz. Bu izleçler temsillerin sahip olduğu bazı özelliklere sahip olacaktır, örneğin $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ izleci her sonlu gruba bir abel grubu atar. Ayrıca her biküme bu gruplar arasında homomorfizmalar verir. Bu noktada sorabileceğimiz birkaç bariz soru var:

- Başka hangi yapılar bu tür izleçler verir?
- Soyut olarak kurabileceğimiz izleçlerden gruplar hakkında ne tür bilgiler elde edebiliriz?
- Bu izleçlerin yapıları nasıl bulunur? Modüllerde olduğu gibi bu izleçleri basit izleçlere parçalayabilir miyiz?
- Benzer özellikteki izleçleri inceleyip temsiller hakkındaki sorulara cevap verebilir miyiz?

Görüldüğü gibi temsilleri bir izleç olarak görmekle yepyeni bir teorinin kapılarını araladık. $[\mathscr{C}, \mathbf{Ab}]$ izleç kategorisi gruplara atayabileceğimiz tüm temsilbenzeri yapıları bir arada inceleme fırsatı sunuyor!

Burada bahsettiğimiz teori "Biküme izleçleri" (İng. "Biset functors") adıyla bilinir. Farklı ilişkileri göz önüne alan ilk teori "Mackey functors" adıyla 1960'larda geliştirilmişti. Sonlu grup temsillerinde bulunan hemen hemen tüm yapılar Mackey functor örneği üretirler. Bu teorinin bir genellemesi olan biküme izleçleriyse 1990'lardan itibaren gelişmeye başlamıştır.

Kategoriler teorisinin verdiği özgürlükleri kullanmaya devam edersek, aslında $\mathscr{C}$ kategorisinin sonlu gruplarla ilişkilendirilmiş özel bir kategori olduğunu ve bu kategoriyi morfizmalarını değiştirerek geliştirebileceğimizi söyleyebiliriz. Tabii bu değişimi anlamlı bir şekilde yapmalıyız. Bu yönde kurulumlar mevcuttur, ancak bu düzeydeki soyutlamanın anlatmaya çalıştığımız hikâyenin bile sınırlarını aştığını rahatlıkla söyleyebilirim. Örneğin, grupların temsillerini çalışmak yerine, bu düzeye ulaştığımızda grupların temsillerinin temsillerinden söz etmek ve bunları çalışmak zor değil!

[1] Kategorinin iskeletini de düşünebileceğimiz için tanımda grupların eş-yapı sınıf temsilcilerinin sınıfını da alabiliriz.
[2] Bikümeler kategorisi simetrik monoidaldir ve bahsettiğimiz grup bu kategorinin Grothendieck grubudur.

Kategoriler Teorisi

Sözlük

Olcay Coşkun / olcaycoskun@gmail.com

İngilizce - Türkçe

$\mathcal{A}$

Axiom of Choice: Seçme aksiyomu

$\mathcal{B}$

Bijection: Birebir ve örten

$\mathcal{C}$

Category: Kategori
Cocone: Külah
Cocomplete: Eştam
Codomain: Hedef nesne
Coequalizer: Denkleştirici
Colimit: Eş-limit
Commutative diagram: Değişmeli diyagram
Complete: Tam
Cone: Koni
Contravariant functor: Aksi izleç
Coproduct: Eşçarpım

$\mathcal{D}$

Diagram: Diyagram
Disjoint union: Ayrık birleşim
Domain: Tanım nesnesi
Double dual space: İkinci eşuzay
Duality: İkililik
Dual space: Eş-uzay

$\mathcal{E}$

Embedding: Gömme
Empty function: Boş fonksiyon
Epic/Epi: Epi
Epimorphism: Epimorfizma
Equalizer: Eşitleyici
Equivalence of categories: Kategori denkliği
Essentially surjective: Özünde örten

$\mathcal{F}$

Faithful: Sadık
Forgetful functor: Unutkan izleç
Fork: Çatal
Full subcategory: Tam alt kategori
Full functor: Dolu izleç
Functor: İzleç

$\mathcal{G}$

Groupoid: Grubumsu

$\mathcal{H}$

Homomorphism: Homomorfizma
Horizontal composition: Yatay bileşke

$\mathcal{I}$

Identity function: Birim fonksiyonu
Identity morphism: Kimlik morfizması
Image: Görüntü
Initial object: Baş nesne
Isomorphism: İzomorfizma
Isomorphic: Eş-yapılı

$\mathcal{L}$

Locally small category: Yerel küçük kategori

$\mathcal{M}$

Monoid: Tekçe
Monomorphism: Monomorfizma
Morphism: Morfizma

$\mathcal{N}$

Natural transformation: Doğal dönüşüm
Natural isomorphism: Doğal izomorfizma
Null/zero object: Sıfır nesne

$\mathcal{O}$

Opposite category: Karşıt kategori

$\mathcal{P}$

Push-out: İleri itim, fiberli toplam

$\mathcal{R}$

Representable functor: Temsil edilebilir izleç

$\mathcal{S}$

Skeleton: İskelet
Small category: Küçük kategori
Source: Kaynak
Subcategory: Alt kategori

$\mathcal{T}$

Terminal object: Son nesne

$\mathcal{U}$

Universal: Evrensel

Kategoriler Teorisi

Sözlük

Olcay Coşkun / olcaycoskun@gmail.com

Türkçe - İngilizce

$\mathcal{A}$

Aksi izleç: Contravariant functor
Alt kategori: Subcategory
Ayrık birleşim: Disjoint union

$\mathcal{B}$

Baş nesne: Initial object
Birebir ve örten: Bijection
Birim fonksiyon: Identity function
Boş fonksiyon: Empty function

Ç

Çatal: Fork

$\mathcal{D}$

Değişmeli diyagram: Commutative diagram
Denkleştirici: Coequalizer
Diyagram: Diagram
Doğal dönüşüm: Natural transformation
Doğal izomorfizma: Natural isomorphism
Dolu izleç: Full functor

$\mathcal{E}$

Epi: Epic/Epi
Epimorfizma: Epimorphism
Eş-limit: Colimit
Eş-uzay: Dual space
Eş-yapılı: Isomorphic
Eşçarpım: Coproduct
Eşitleyici: Equalizer
Eştam: Cocomplete
Evrensel: Universal

$\mathcal{G}$

Gömme: Embedding
Görüntü: Image
Grubumsu: Groupoid

$\mathcal{H}$

Hedef nesne: Codomain
Homomorfizma: Homomorphism

İ

İkililik: Duality
İleri itim: Push-out
İkinci eş-uzay: Double dual space
İskelet: Skeleton
İzleç: Functor
İzomorfizma: Isomorphism

$\mathcal{K}$

Karşıt kategori: Opposite category
Kategori denkliği: Equivalence of categories
Kategori: Category
Kaynak: Source
Kimlik morfizması: Identity morphism
Koni: Cone
Küçük kategori: Small category
Külah: Cocone

$\mathcal{M}$

Monomorfizma: Monomorphism
Morfizma: Morphism

Ö

Özünde örten: Essentially surjective

$\mathcal{S}$

Sadık: Faithful
Seçme aksiyomu: Axiom of Choice
Sıfır nesne: Null/zero object
Son nesne: Terminal object

$\mathcal{T}$

Tam alt kategori: Full subcategory
Tam: Complete
Tanım nesnesi: Domain
Tekçe: Monoid
Temsil edilebilir izleç: Representable functor

$\mathcal{U}$

Unutkan izleç: Forgetful functor

$\mathcal{Y}$

Yatay bileşke: Horizontal composition
Yerel küçük kategori: Locally small category

Dizin

Ali Karatay'ın Doktora Tezi
Doğal Sayıların Kategori Teorisiyle Modellenmesi

Alp Eden, Gürol Irzık
Boğaziçi Üniversitesi / Sabancı Üniversitesi
alp.eden5@gmail.com, gurol.irzik@sabanciuniv.edu

Matematik Dünyası'nın genç okurları Ali Karatay ismini duymamış olabilirler. Ali Karatay bugün 83 yaşında, ülkemizin en seçkin matematiksel mantıkçılarından biri. Çarpıcı bir hayat hikâyesi var. Bu hikâyenin bir kısmını *Ali Başak Karatay: Matematik-Felsefe Kavşağında Bir Mantıkçı* başlıklı yazımızda bulabilirsiniz (bkz. Eden, Güzeldere ve Irzık 2024).[1] Burada şu kadarını söyleyelim ki Ali Karatay lisans düzeyinde ne felsefe ne de mantık okumuş, zira İstanbul Üniversitesi Hukuk Fakültesi mezunu. Mezuniyetinden kısa bir süre sonra ülkemizin efsanevi mantıkçı ve felsefecilerinden Teo Grünberg ve felsefeci Hüseyin Batuhan ile tanışıp mantığa yönelmiş. Yöneliş o yöneliş! O yol onu önce ABD Pittsburgh Üniversitesi felsefe ve matematik bölümlerine, oradan Berkeley Üniversitesi'ne 20. yüzyılın en büyük mantıkçılarından Alfred Tarski'nin araştırma grubuna katılmaya götürmüş. Akabinde ODTÜ ve Boğaziçi Üniversitesi Matematik ve Felsefe bölümlerinde hocalık yapmış, yıllar sonra yine ABD'ye, ama bu sefer Syracuse Üniversitesi Felsefe Bölümü'ne gitmiş ve orada 1999 yılında 58 yaşındayken *Sayma Süreci ve Kategori Kuramı: Doğal Sayıların Psikogenesisi* başlıklı doktora tezini yazmış. Tekrar Türkiye'ye dönüp Boğaziçi Üniversitesi Felsefe Bölümü'ne öğretim üyesi olmuş ve oradan emekli olmuş.

Bu kısa girişten de anlaşılabileceği gibi, Karatay'ın doktora tezi tam bir olgunluk eseri. Önce öğrenci sonra da üniversite hocası olarak mantık, matematik ve felsefe alanında edindiği birikimin, matematiğin temellerine dair son derece özgün, yetkin ve berrak bir yansıması. İçinde irili ufaklı bir çok cevher içeren bu tezin tamamını böyle bir yazıda özetlemeye imkânımız olmadığından matematik okurları için en can alıcı bölümünü tanıtmakla yetineceğiz.

Karatay'ın tezini motive eden temel fikir şu: Başlangıçta sayma vardı, sonra matematiğin doğrularına vardık! Öyleyse, hepimizin daha küçük yaşta doğrudan deneyimlediği sonlu sayma sürecinin, Peano aksiyomlarının bir sonucu olarak ortaya çıkan aritmetik doğrularla, basit sayı kuramıyla bir ilgisi olmalıdır; hatta ilki diğerinin sebebi olmalıdır (Karatay 1999, s. 6). İşte Karatay tezinde bunun nasıl mümkün olduğunu göstermiş ve böylece matematik bilgisine nasıl ulaştığımıza dair çarpıcı ve ufuk açıcı bir görüş ileri sürmüştür. Karatay'ın ne yapmak istediğini bir çerçeveye oturtabilmek için konunun tarihsel arka planına kısaca göz atmamızda yarar var.

Matematiğin Temelleri Üzerine Çalışmalar: Lojisizm ve Kümeler Kuramı

Başta sayılar olmak üzere matematiğin nesnelerinin ne tür şeyler olduğu (felsefi terminolojiyle söylersek ontolojik mahiyeti), matematik bilgisinin nasıl olup da zorunlu ve kesin doğrulardan oluştuğu (dolaysıyla sağlamlığı), bu doğrulara nasıl ulaştığımız (yine felsefi terminolojiyle söylersek epistemik mahiyeti) üzerine görüşler, kısaca matematik felsefesi Platon'a kadar geriye giden uzun bir tarihe sahiptir. Matematiğin temellerine yönelik çalışmalarsa esas olarak 19. yüzyılda başlar. Örneğin, türev 17. yüzyılda Newton ve Leibniz tarafından bulunmuştur, ama bildiğimiz limit kavramıyla sağlam bir biçimde tanımlanması ancak 19. yüzyılda mümkün olmuştur. Analizin aritmetizasyonu, aritmetiğin aksiyomatize edilmesi (Peano), doğal sayılardan yola çıkarak reel sayıların inşa edilmesi (Dedekind) hep bu yüzyılda gerçekleşmiştir. Keza modern, yani sembolik mantık yine bu yüzyılda Frege tarafından oluşturulmuştur.

Frege'nin matematik hakkındaki görüşleri bu bağlamda özel bir öneme sahip. Zira Frege bir yandan matematiğin mantığa indirgenebileceğini iddia eder (lojisizm), diğer yandan mantık yasalarının insan zihninin çalışma yasalarıyla bir ilgisi olmadığını ileri sürer (anti-psikolojizm). Frege'ye göre mantığın aksiyomları apaçıktır, mantık bilgisi de deneyimden bağımsız (*a priori*), zorunlu ve kesindir. Matematik mantığa indirgendiğinde matematik bilgisi de öyle olacaktır. Bir bakıma matematiğin tüm

[1]Karatay'ın hayat hikâyesinin tamamı hakkında kapsamlı bir belgesel hazırlanması için de çalışıyoruz ve umuyoruz ki, yıl ortalarında tamamlanmış olacak.

teoremleri (belki de tüm doğruları) mantık teoremleridir (mantık doğrularıdır). İspatları da deneyime değil sadece akla bağlıdır. Böylece, Frege ne matematiğin ne de mantığın psikolojik olgu ve süreçlerle açıklanamayacağını, yani anti-psikolojizmi savunur. Karatay ise matematik bilgisini sayma süreciyle ilişkilendirdiğinden, Frege'den ve daha genel olarak da her türlü anti-psikolojist yaklaşımdan ayrılır.

Frege'nin matematiği mantığa indirgeme projesi Bertrand Russell'ın Frege sisteminde bulduğu bir paradoksla çöker. Russell ve meslektaşı Alfred Whitehead matematiği mantığa indirgeme projesini kurtarmak için kapsamlı bir çabaya girişirler. Bu çaba tip-kuramı olarak bilinir ve tıpkı Frege'de olduğu gibi psikolojik süreçleri tamamen dışlar. Ama sundukları çözüm sonsuzluk aksiyomuna dayandığı için mantığın dışına çıkmış olur.

20. yüzyılda kümeler kuramındaki gelişmeler matematiğin temellendirilmesi çabalarının yönünü değiştirir. Cantor ve Hilbert'in liderliğinde matematiğin temellendirilmesinin ancak kümeler kuramıyla mümkün olabileceği fikri kimi mantıkçı, ama özellikle de matematik felsefecileri arasında yaygın hale gelir. O kadar ki günümüzün bazı standart ders kitaplarında şu ifadelere rastlarız: "Kümeler kuramı matematiğin temelidir. Bütün matematiksel kavramlar primitif küme ve üyelik nosyonlarıyla tanımlanır. Aksiyomatik kümeler kuramında bu primitif nosyonlar hakkındaki aksiyomları formüle ederiz. Bu aksiyomlardan bilinen tüm matematik türetilebilir" (Kühnen 1980, p. xi).

Ali Karatay açısındansa bu tür bir yaklaşımın teknik açıdan getirisi ne olursa olsun üç ciddi sonucu vardır. Birincisi, tıpkı lojisizmde olduğu gibi, sayma süreci matematiğin dışına itilir, anti-psikolojizm burada da kendini gösterir. İkincisi, matematiksel bilgiye nasıl ulaştığımız sorusu yanıtsız kalır. Üçüncüsü, matematiğin temellerine ilişkin çalışmalar matematik pratiğinden kopmaya başlar. Karatay sayma sürecini öne çıkararak matematiğin, daha spesifik olarak söylersek sayılar kuramının psikogenetik bir inşasının mümkün olduğunu savunur. Böylece matematiğin hem bilgisine nasıl ulaştığımız sorusu yanıtlanabilecek hem de temellerine ilişkin mantıksal ve felsefi çalışmalar matematik pratiğiyle uyumlu hale gelecektir. Karatay'a göre bunun için en uygun kuram kategori kuramıdır.

Kategori Kuramı

Bir yandan günümüzün matematiksel mantıkçıları kümeler kuramının incelikleriyle uğraşırken, diğer yandan gittikçe artan ve çeşitlenen matematiksel yapı örnekleri matematiksel yapılarla daha otonom bir biçimde uğraşmaya önayak olur. 1945 yılında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane kategori kuramını bu yapıları inceleyebilmek için bir araç olarak önerir (Eilenberg-Mac Lane 1945). (Bkz. Görsel 1.) O tarihten itibaren de kategori kuramı matematiği temellendirme çalışmalarında kümeler kuramıyla rekabet etmeye başlar.

Görsel 1: Saunders Mac Lane ve Samuel Eilenberg 1992 yılında toplanan bir kategori teorisi konferansında yan yana.

En geniş ifadesiyle kategori kuramı, yapıların ve yapı sistemlerinin genel matematiksel kuramıdır. Bu yapıların evrensel özellikleri ile farklı yapıların birbiriyle ilişkilerini ortaya koyar. Dolayısıyla, kategori kuramı bir yandan 1960'lı yıllarda matematik felsefesinde etkin olmaya başlayan yapısalcılık akımı (structuralism) ile etkileşim içinde büyür, diğer yandan kümeler kuramının ayrıcalıklı pozisyonunu sarsar. Çok basit bir örnek vermek gerekirse, vektör uzayları bir kategori teşkil eder, ondan bahsedebilmek için hem grup hem de cisim kategorilerini, yani bu kavramların tanımlarını bilmemiz gerekir. Lineer cebir derslerinde vektör uzaylarının aksiyomları verilir, ama kümeler teorisinin aksiyomlarından pek bahsedilmez. Karatay da sayılar teorisi konusunda çalışan matematikçilerin gerek kümeler kuramı gerekse de Peano aksiyomlarına nadiren başvurduklarını, bunun da doğal sayıları kümeler kuramıyla temellendirme çabalarının günümüz matematik pratiğinden uzak kalması anlamına geldiğini belirtir. Yine de kategori teorisinin matematiğin temellendirilmesinde kümeler teorisinin yerini doldurup dolduramayacağı devam eden bir araştırma konusudur (Hellmann 2003; Reck-Schiemer 2023).

Alexander Grothiendick'in (1928-2014) kategori kuramından yola çıkarak oluşturduğu topos kuramı sayılar teorisinde Andre Weil'in sorduğu bazı (açık) problemlerin çözümünde kritik rol oynar. Kategori kuramının soyut bir teori olduğu ve matematiğe ciddi uygulamalarının olmadığı önyargısı da bu şekilde yıkılmış olur. Günümüzde kategori kuramından bilgisayar bilimcileri kadar teorik fizikçilerin de yararlandığını belirtelim (Baez-Stay 2009).

Şimdi Karatay'ın doktora tezine geçebiliriz.

Karatay'ın Doktora Tezinin Özeti

Karatay'ın doktora tezi beş bölümden oluşur (Görsel 2). Birinci bölüm tezi motive eden görüşü içerir ki buna yukarıda değinmiştik. Karatay aynı bölümde sayma sürecinin Öklid'den Brouwer'a matematik pratiğinde nasıl bir yer tuttuğunu betimledikten sonra Frege'nin anti-psikolojizminin 20. yüzyıl matematik felsefesini nasıl etkilediğini, sayma sürecinin önemini nasıl unutturduğunu anlatır. Karatay 2. bölümde kategori kuramının temel kavram ve ilkelerini sunar, kategori kuramı vasıtasıyla sayma sürecini modeller, bu modelden Peano aksiyomlarını türetir ve modelinin tekliğini de gösterir. Üstelik tüm bunları doğal sayı nesnesi kullanmadan yapar. 3. bölümde sonsuz sayma prensibiyle doğal sayıları ilişkilendirir. Bu bölümde ayrıca sonluluk ve sonsuzluk kavramlarıyla bir hesaplaşmaya girişir. Özellikle büyük sayılı sonlu adımlı ve sonsuz adımlı bilgisayar programlarının pratikte neden farklı olmadığı vurgular. Ayrıca çocukların sayıları nasıl öğrendikleriyle ilgili psikolojik tezler sunar. Tezin başlığındaki "psikogenesis" ifadesi anlamını bu bölümde bulur.

Contents

v

Görsel 2: Sayma Süreci ve Kategori Kuramı: Doğal Sayıların Psikogenesisi tezinin içindekiler bölümü.

Sonsuz sayma ilkesi (süreci) Karatay'ın tezinin temeli olduğu için bu kavramın psikogenetik açıdan temellendirilmesi olası eleştirilere cevap verme olanağı yaratır. Karatay sonsuzluk kavramı içeren bir kuramın çelişkisiz olamayacağının farkındadır ve yaklaşımını savunurken Beneceraf'ın iki kısıtını kendine şiar edinir.[2] Tezin 4. bölümündeyse Frege'yle ve Wittgenstein'ın geç dönem görüşleriyle hesaplaşır, onların görüşlerinden çıkarsanabilecek eleştirilerilere yanıt verir. Tez bir sonuç ve değerlendirme bölümüyle biter.

Bu yazı bağlamında Karatay'ın tezinin en can alıcı kısmı 2. ve 3. bölümlerdir. Biz de esas olarak bunların üzerinde duracağız. Fakat daha önce, Peano aksiyom sisteminin tabi olduğu bazı neticelere ve "teklik problemi" üzerinde kısaca durmakta yarar görüyoruz.

vi

Görsel 3: Sayma Süreci ve Kategori Kuramı: Doğal Sayıların Psikogenesisi tezinin içindekiler bölümü.

Standart Olmayan Modeller ve Teklik Sorunu

Peano aksiyom sistemi Yukarı Löwenheim-Skolem teoremi adıyla anılan neticenin kapsamı alanındadır. Bu teoreme göre belirli koşullar altında bazı aksiyom sistemlerinin sonsuz kardinalitede bir modeli varsa, o kardinaliteden daha büyük her kardinalite için de bir modeli vardır. Yani bazı aksiyom sistemleri onu gerçekleyen modelin tekliğini garantilemiyor. Matematikçiler bir sistemin/yapının tüm modellerinin birbirine eşyapılı (izomorfik) olma durumuna "kategorik sistem" diyorlar. Bu aksiyom sistemini sağlayan, ama hedef modelden farklı modeller de var; bunlara "standart olmayan modeller" deniyor. Peano aksiyomları da standart olmayan modellere sahip aksiyom sistemlerinden biridir. Başka bir deyişle, Peano aksiyom sistemi kategorik değildir. Bu karmaşık görünen durumdan çıkan şaşırtıcı ve rahatsız edici neticeler de var. Standart olmayan modelde doğru olan bir netice standart modelde doğru olmayabilir. Somut

[2]Benecaref'in iki kısıtı şöyle: (1) Matematiksel önermelerin semantiği dilin genel semantiğiyle uyumlu olmalıdır. (2) Matematiksel doğruların bilgisine nasıl ulaştığımızı açıklama biçimi genel bilgi kuramıyla uyuşmalıdır.

bir örnek vermek gerekirse, doğal sayıların kümeler yoluyla iki türlü modellenmesine bakalım. İlk modelde 0 boş küme, $\varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$ olarak tanımlanır ve bu işlem kıvrık parantezlerin sayısını çoğaltarak devam eder. İkinci modeldeyse yine boş kümeyle başlanıp $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ olarak alınır. İkinci modelde $n + 1$ sayısından küçük her sayı $n + 1$ sayının elemanıdır, ama birinci modelde bu doğru değildir.

Doğal sayıları kümeler kuramıyla inşa etmeyen Karatay sayma işlemini, yani n'den $n + 1$'e geçişi, modeline öncül kavram olarak alır ve bu işlemi kategori kuramındaki bir morfizma (ok) ile belirtir. Bu morfizmanın üzerinde tanımlandığı bir nesne (mesela bir küme) olması gerekmez, bu da bizi Karatay'ın sadece eylemlerden oluşan modeline doğru götürür.

Görsel 4: William F. Lawvere (1937-2023)

Karatay'ın Nesnesiz Kategori Kuramı ve Doğal Sayılar için bir Model

Doğal sayıları kategori teorisi yardımıyla temellendiren ilk kişi Eilenberg'in doktora öğrencisi olan Amerikalı matematikçi ve mantıkçı William Francis Lawvere'dir (Görsel 4). Lawvere "doğal sayı nesnesi" (NNO, natural number object) kavramını ortaya atar ve bu sayı nesnelerinin Peano aksiyomlarını sağladığını gösterir (Lawvere, 1964). Karatay tezinde bu yaklaşımdan yararlanır ve sunduğu basitleştirilmiş modelin Lawvere'in kurmuş olduğu teorik çerçeveye paralel bir biçimde geliştirilebileceğini gösterir. Modelin tekliğini garanti edebilmek için kategori teorisi içinde çok minimal bir dille işe başlayan Karatay, daha sonra bu minimal modelde aritmetik operasyonları tanımlayabilmek ve gerekli neticeleri elde etmek için kartezyen çarpım altında kapalı kategorileri kullanır. Oluşturduğu modelin hem Peano aksiyom sistemini sağladığını hem de tekliğini ispatlar.

Bu sayıda Olcay Coşkun'un yazılarında ayrıntılı biçimde anlattığı gibi, kategori kuramı en geniş anlamda nesneler ve onlar arasındaki oklarla (morfizmalarla) ilgilenir. Bu nesneler küme olmak zorunda olmadığı gibi, morfizmaların da fonksiyon tanımına uymaları gerekmez. Eilenberg ve Mac Lane makalelerinde nesnesiz kategori teorisi yapılabileceğini gözlemlemişler, ama buna pratikte ihtiyaç duymamışlardır. Sadece morfizmalar yoluyla verilen tanımda birim morfizmalar da vardır ve bu birim morfizmalar yardımıyla nesnelere tekrar ulaşmak mümkündür. Vurgulamak gerekirse kategori teorisi için morfizmalar nesnelerden daha vazgeçilmez bir rol oynar. Nesneler olmadan kategori teorisi yapılabilir, ama morfizmalar olmadan yapılamaz.

Karatay tezinde nesnesiz bir kategori teorisi inşa eder ve Lawvere'nin nesneli kategori teorisinde kurduğu doğal sayı nesneleri yerine, doğal sayı morfizmalarını (NNM, natural number morphisms) oluşturur. Daha da ileri giderek sadece saf morfizmalardan (kabaca söylersek, bu morfizmalar arasında bir nesne üzerinde birim morfizması gibi davranan morfizmalar yok) oluşan bir kuramsal çerçeveyi tercih eder. Böylece Lawvere'in oluşturduğu çerçeveyi tekrar oluşturur ve Lawvere Teoremini ispatlar. Çok daha kısıtlı bir dil kullanarak Lawvere'in elde ettiği neticelere ulaşabilmesi sayesinde Karatay "sonsuz sayma ilkesi" ve bunun üzerindeki öteleme morfizması yardımıyla doğal sayı morfizmalarını oluşturmayı başarır ve bu modelin Peano aksiyomlarını sağladığını gösterir.

Sonsuz sayma ilkesi başlangıcı olan ve hiç durmayan bir eylem. Bu eylem sonsuz sayıda aynı morfizmanın art arda uygulanmasıyla ortaya çıkar. Karatay bu morfizmayı $\to$, Γ (gama) ile belirtir. Morfizmanın sonsuz sayıda tekrarı sonsuz sayma prensibini modeller:

$$\cdot \to \cdot \to \cdot \to \ldots$$

Sonsuz sayma süreci (ilkesi) kategori kuramı bağlamında bir "nesne" görevi görür. "γ morfizması" bu nesne/süreç üzerinde öteleme işlemine (successor operation) karşılık gelir. Yukarıda belirttiğimiz gibi, Karatay'ın modelinde standart kategori kuramında olan nesneler ve morfizmalar yok, sadece "saf morfizmalar" var. Sonsuz sayıda Γ okunun ardarda gelmesiyle oluşan "işlem" aslında sonsuz sayma işlemidir. Böyle bir işlemin varlığını kabul ederek Karatay sonsuzluğu modelinin içinde varsaymış olur.

Sonlu ve Sonsuz Sayma İlkesi Farkı

Karatay sonsuz sayma ilkesini sonlu matematikçilere karşı savunur. Bunu iki yolla yapar. İlkinde bazı sonlu sayılara sayarak ulaşmanın o kadar basit olmadığını Kolmogorov'un karmaşıklık fonksiyonu yardımıyla gösterir. Burada bazı sayıları tanımlamak için gerekli bilgisayar programı uzunluğunun ya da Kolmogorov karmaşıklık fonksiyonu değerinin, sayının kendisinden büyük olduğu durumlarda bu sayılara "sıkıştırılamaz sayılar" (incompressible numbers) der. Büyük sayılara varmak için adım adım gidilen yolda bu sıkıştırılamayan sayılardan mutlaka vardır. David van Dantzig bir makalesinde "$10^{10^{10}}$ sonlu bir sayı mıdır?" sorusunu sorar (van Dantzig 1955). Karatay da benzer bir şekilde $10^{10^{100}}$ sayısının epistemik erişilebilirliğini sorgular, yani sayarak böyle büyük bir sayıya ulaşmanın mümkün olup olmadığını sorar. Bu sayıya "bir bir" sayarak gitmenin karmaşıklığı büyük, sıkıştırılamaz sayılardan geçtiğini belirterek bu görevin bir çocuğun gerçekleştiremeyeceği karmaşıklıkta olduğunu iddia eder. Bu haliyle büyük sayılar için sonlu saymayla sonsuz sayma sürecinin kavranabilme açısından bir fark içermediğini vurgular. İkinci savunusunda sonlu, ama çok büyük sayılar için yazılan bilgisayar programlarının açık uçlu programlardan farklı olmadığını belirtir, çünkü iki süreç de sonuçlanmayacaktır. Özetle çok büyük sayılar söz konusu olduğunda erişim (epistemik) açısından sonlu sayma işlemiyle sonsuz sayma işlemi arasında bir farklılık olmadığını iddia eder.

Bitirirken

Karatay'ın sayılar kuramına neden kümeler kuramıyla değil de kategori kuramıyla ve nasıl yaklaştığını ortaya koymaya çalıştık. Bundan onun kümeler kuramını küçümsediği sonucu çıkarılmasın. Karatay'a göre her iki kuram da elbette meşru ve yararlı. Bununla birlikte, matematik felsefesine kategori kuramı perspektifinden yaklaşmanın birçok açıdan artıları olduğu gözden kaçırılmamalı. Bunlardan belki de en önemlisi süreçleri öne çıkaran kategori kuramının matematik bilgisine nasıl olup da ulaştığımızı açıklaması, kümeler kuramınınsa bu konuda yetersiz kalması. Bir kuramın bir disipline temel olması bir şeydir, o disiplinin bilgisine nasıl eriştiğimizi açıklayabilmesi başka bir şeydir. Karatay'ın kategori kuramını tercih etmesinin nedeni ikisini birden yapabilmesidir.

Karatay'ın tezinin başlığını hatırlayalım: "Sayma Süreci ve Kategori Kuramı: Doğal Sayıların Psikogenesisi". Sözlük anlamıyla "psikogenesis" terimi bir şeyin psikolojik çıkışına ve gelişimine, dolayısıyla bir sürece işaret ediyor. Karatay'a göre doğal sayılar ve aritmetik bilgisi *nihai olarak* zihinsel bir süreçten, sayma sürecinden doğar, gelişir. Karatay'ın tezinde çocukların sayma yardımıyla sayıları nasıl öğrendiğine eğilmesinin nedeni budur. Keza matematik tarihine bakmasının nedeni de aynıdır. Öklid, de Morgan, Kronecker, Dedekind ve Brouwer gibi matematiğe büyük katkı yapan matematikçilerin çalışmalarını incelediğinde saymanın ne kadar merkezi bir rol oynadığını görür. Matematik tarihi çocukların sayıları ve matematik öğrenme sürecini adeta makro düzeyde yansıtır. Ancak ve ancak kategori kuramı bu zengin malzemeye hakkını verir.

Teşekkür

Olcay Coşkun'a, Joan Baez referansı için Sadık Değer'e, Ersin Karabudak'a yorum ve destekleri için teşekkür ederiz.

Kaynaklar

[1] Baez, C. John; Stay, Mike (2009) "Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone" `https://arxiv.org/abs/0903.0340`

[2] Eden, Alp; Güzeldere, Güven; Irzık, Gürol (2024) "Ali Başak Karatay: Matematik-Felsefe Kavşağında bir Mantıkçı" kitap maddesi, Cumhuriyetin 100 Felsefecisi, Felsefeciler Derneği Yayınları, s. 313-320.

[3] Eilenberg, Samuel; Mac Lane, Saunders (1945) "General theory of natural equivalences" Transactions of the American Mathematical Society. 58: 247. doi:10.1090/S0002-9947-1945-0013131-6. ISSN 0002-9947. Archived (PDF) from the original on 2022-10-10.

[4] Hellman, Geoffrey (2003) "Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?" Philos. Math. (3) 11 no. 2, 129–157.

[5] Karatay, Ali Başak (1999) The counting process and category theory: The psychogenesis of the natural numbers, Syracuse University, Philosophy - Dissertations. 37.

[6] Lawvere, F. William (2005) [1964]. "An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary". Reprints in Theory and Applications of Categories. 11: 1–35.

[7] Mac Lane, Saunders (1989) "Concepts and Categories in perspective" pp. 323–365 in A century of mathematics in America, part I. Edited by P. Duren, R. A. Askey, and U. C. Merzbach. History of Mathematics 1. American Mathematical Society (Providence, RI), 1988.

[8] `https://community.ams.org/publicoutreach/math-history/hmath1-maclane25.pdf`

[9] Mac Lane, Saunders (1989) "Addendum: 'Concepts and categories in perspective'," pp. 439–441 in A century of mathematics in America, part III. Edited by P. Duren, R. A. Askey, H. M. Edwards, and U. C. Merzbach. History of Mathematics 3. American Mathematical Society (Providence, RI), 1989.

[10] Reck, Erich and Georg Schiemer, "Structuralism in the Philosophy of Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.),

[11] Van Dantzig, David (1955) "Is $10^{10^{10}}$ a Finite Number?", Dialectica vol. 9, issue 3-4, 273-277.