

Kategoriler Teorisi

# Doğallık, Evrensellik ve İkililik ☺☺

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com



Matematikçilerin sıklıkla “Bu çok doğal bir sonuç” ya da “Bu çok doğal bir teorem” dediğini duyarız. Birçoğumuz için bu iddia anlaşılır (ya da doğal) olsa da matematiksel olarak kesin anlamı herkes tarafından iyi bilinmez.

1940’larda “doğallık” kavramına matematiksel bir anlam vermek üzere yola çıkan Eilenberg ve Mac Lane önce “doğal dönüşümleri” sonra “izleçleri” ve en sonunda “kategorileri” tanımladılar. Bu tanımlarla birlikte doğallık bir içgüdü olmaktan çıkıp matematiksel olarak kanıtlanabilecek bir iddiaya dönüştü. Keşfi yapan matematikçilerin itici gücünü bu yazılarda açıklamamız mümkün değil. Bunun yerine yeni başlayanlar için itici bir güç olabilecek bir örnekle başlayacağız.

Doğallığı hissedebileceğimiz en temel örneklerden birisi izomorfizma teoremleridir. Bu teoremler, matematik eğitiminde ilk olarak doğrusal cebir derslerinde ortaya çıkar. En doğal ve en yalın uyarlamasını “rank-nullity” teoremi olarak görürüz. Bir doğrusal dönüşüm  $T : V \rightarrow W$  verilsin.  $T$ ’nin görüntüsünün boyutuyla (yani  $T$ ’nin *kertesiyile* ya da *rankıyla*) çekirdeğinin boyutunun (yani  $T$ ’nin *nullitesinin*) toplamı  $V$ ’nin boyutuna eşittir:

$$\dim V = \dim \text{Gör } T + \dim \text{Çek } T \quad (1)$$

Matematikte biraz daha ilerleyip gruplar teorisini öğrendiğimizde bir grup homomorfizması  $\phi : G \rightarrow H$ ’nin görüntüsünün  $G$  ile  $\phi$ ’nin çekirdeğinin oran grubuna izomorfik olduğunu öğreniriz:

$$G/\text{Çek } \phi \cong \text{Gör } \phi \quad (2)$$

Aradaki benzerlik su götürmez! Aslında biraz düzenlemeyle birbirlerine dönüştürebiliriz de. İkinci eşitlik (2) aslında cebirsel bir denklikten söz ediyor; ama sadece mertebeler cinsinden yazarsak,

$$|G| = |\text{Gör } \phi| \cdot |\text{Çek } \phi| \quad (3)$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde ilk eşitliği de daha cebirsel ifade etmek mümkün:

$$V/\text{Çek } \phi \cong \text{Gör } \phi$$

Birbirinden farklı görünen bu yapılar arasındaki benzerlik bizi cezbeder; ama dahası var! Halkaları

öğrendiğimizde halkalar için, modülleri öğrendiğimizde modüller için, topolojik uzayları öğrendiğimizde topolojik uzaylar için vs hep bir izomorfizma teoremi bulunur ve bu teoremi kanıtlamak artık bize çok “doğal” gelmeye başlar.

Peki, ama neden bu teorem tüm bu farklı nesne toplulukları için kanıtlanabiliyor? Tüm bu teoremlerin doğru olmasını sağlayan “öz” nedir?

Bu örneğimizin benzeri ve daha yoğun ilişkiler bizi “öz” teoremler bulmaya, farklı nesne topluluklarında doğru olan sonuçları ortak bir dille ifade etmeye iter. Bu çabanın bizi, kendimizi tekrarlamaktan kurtarmanın ötesinde faydaları da vardır. Problemlerimizi de soyutlayabilir, başka tür nesnelere üzerinde anlam verip çözmeye çalışabiliriz.

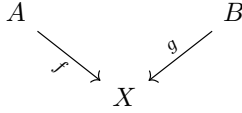
Varlığı yaygın olan başka bir kavramdan daha söz etmek istiyorum: Evrensellik! Birbirlerine benzer kavramlar olsa da “doğallık” bir sonucun özünüyle ilgiliyken “evrensellik” bir özelliğe sahip nesnelere içinde “özel” olmayla ilgilidir. Evrensel nesnelere düzgün tanımlansa bile her zaman var olmayabilirler. İlerleyen bölümlerde tanımını vereceğiz; ama basit bir örneğe göz atalım.

Kümeler için “ayrık birleşim” işlemini hepimiz biliriz.  $A$  ve  $B$  kümeleri verildiğinde  $A \sqcup B$  kümesini  $A$  ve  $B$ ’nin elemanlarından oluşan küme olarak tanımlarız. Birleşim kümesinden farklı olarak ortak olabilecek elemanları da farklı düşünmek gereklidir. Bu sebepten  $A$  yerine  $A \times \{0\}$  kümesini,  $B$  yerineyse  $B \times \{1\}$  kümesini alıp bu iki kümenin birleşimini ayrık birleşim olarak da tanımlayabiliriz, yani

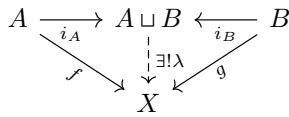
$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

Peki, ayrık birleşimin sahip olduğu temel özellik nedir? Kolayca görüleceği gibi elde ettiğimiz küme hem  $A$  kümesini hem de  $B$  kümesini içermektedir. Ama tabii ki bu özelliğe sahip yegâne küme  $A \sqcup B$  değildir. Örneğin birleşim kümesi  $A \cup B$  de aynı özelliği sağlar. Daha çok elemanı olan kümeler de bulmak mümkündür, ancak bulacağımız herhangi bir örnek  $A \sqcup B$ ’yi “biricik olarak” içermelidir! Dolayısıyla,  $A \sqcup B$  kümesi,  $A$  ve  $B$ ’yi içeren kümeler içinde “özel” bir nesnedir, diğer bir ifadeyle, *evrensel*dir.

Şimdi bu özelliği biraz daha matematiksel bir dilde yazmaya çalışalım. Yukarıdaki tanımları şimdi dilik unuttuk. İlgilendiğimiz kümeler  $A$  ve  $B$  kümelerini içerenler. Bu içerme özelliğini şöyle ifade edebiliriz:  $f : A \rightarrow X$  ve  $g : B \rightarrow X$  birebir fonksiyonları varsa  $X$  kümesi hem  $A$  hem de  $B$ 'yi içeriyordur deriz. Diyagram kullanarak bu yazımı görselleştirelim:



Özel olmasını istediğimiz kümenin,  $A \sqcup B$  diyelim, hem yukarıdaki özelliğe sahip olmasını hem de tüm bu  $X$ 'lerin bu kümeyi biricik içermesini istiyoruz. Bu cümleyi de diyagrama çevirebiliriz:



Dikkat ederseniz, ilk satırdaki fonksiyonlar  $A$  ve  $B$ 'nin  $A \sqcup B$  içinde olduğunu gösterirken kesikli okla gösterdiğimiz  $\lambda$  fonksiyonu  $A \sqcup B$ 'nin  $X$ 'in içinde olduğunu veriyor.

Evrensel nesne örneklerini çoğaltmak mümkün. Dikkat çekmek istediğim ve evrensel nesnelerin belirleyici yanı, bu nesnelerin belirli bir özelliği sağlayan nesnelere içinde bir tür *başlangıcı* ya da *bitişi* belirttikleridir.

Başlıktaki sonuncu kelimeye gelelim. İkililik (İng. duality) ilk iki kavramın aksine farklı anlamlar taşır. Ama her zaman birbiriyle yakından ilişkili iki kavramın/nesnenin varlığına işaret etmektedir. Soyut formda düşünülebileceği gibi ki bunu ileride açıklamaya çalışacağız, daha bilinen haliyle karşıtlık anlamında ya da eşleme anlamında da düşünülebilir. İlerleyen sayfalarda daha net olabileceğimizi söyleyip bir örnek verelim.

İlk örneğimiz karşıtlık anlamındaki ikililiğe bir örnek olacak.  $X$  bir evrensel küme olsun.<sup>1</sup> Bir  $A \subseteq X$  kümesinin *tümleyenini*  $X$ 'in  $A$  dışında kalan tüm elemanlarının kümesi olan  $A^c$  olarak tanımlanır:

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

Tümleyen tanımı  $X$ 'in altkümeleri arasında bir eşleme vermektedir; çünkü açıkça görüleceği gibi  $(A^c)^c = A$  sağlanır. Bu eşleme kümeler için tanımlanmış bazı ilişkilere de uygulanabilir. Örneğin  $A, B \subseteq X$  ise,

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$$

ve

$$A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$$

önergeleri doğrudur. Çoğu durumda, eğer  $X$  kümesi üzerine koyacağımız bir yapı "tümleyenlik" özelliğini bu yapıya genelleyebiliyorsa, tümleyenlik kullanılarak yeni tür önermeler de kanıtlanabilir.

Örneğin,  $X$  üzerine bir topolojik uzay yapısı koymak temel olarak bu uzayın hangi altkümelerinin *açık* olduğunu (ya da denk olarak, hangi altkümelerinin *kapalı* olduğunu) belirlemeye denktir.<sup>2</sup> Şimdi şunu kanıtlayabiliriz:

$$A \subseteq X \text{ açıktır} \iff A^c \subseteq X \text{ kapalıdır.}$$

Benzer şekilde topolojik uzaylardaki birçok sonuç birbirine denk ikililer olarak gelir ve aradaki ilişki tümleyen alınarak bulunur.

Kısaca söz ettiğimiz bu üç kavramı soyut olarak ve bir arada düşünmek hem matematiksel nesnelere hem de sıklıkla karşılaştığımız bazı kurulumları/teoremleri daha iyi anlamamızı sağlar ve dolayısıyla yeni durumlarda benzer kavramları üretmemizi ve kullanmamızı kolaylaştırır. Bir anlamda matematiğin özünü görmemizi sağlar.

İsteğimizi büyük ölçüde yerine getiren *kategori teorisi* giriş yapacağız. Herkesin kategoriler hakkında biraz fikri olabilir ve "Neden kategoriler teorisi öğrenelim?" sorusunu sorabilir. Bu soruya cevap olarak kategoriler teorisinin evrensel ve heyecan verici bir yanı olduğunu, matematiğin içindeki benzerlikleri ortaya koymak üzere her şeyi daha soyut bir düzeye çıkardığını ve böylece matematiğe kuş bakışıyla bakıp daha anlaşılır kıldığını söyleyebiliriz.

Yukarıda da belirttiğim gibi bir amacımız problemlerin özünü bulmaktır. Bunun için problemi tanımlandığı çerçeveden (yani kategoriden) bağımsız düşünmek üzere o çerçevenin verdiği önyargıları kırmamız gerekir, buna problemi *kategorileştirmek* denir.

İlk yazımızda temel tanımları ve örnekleri sizlerle paylaşacağım. Bu noktada bir uyarı da yapmalıyım. Geniş bir matematiksel nesne birikimi olmayan okuyucu için bazı kavramları soyutlamak ya da halihazırda soyut verilmiş bazı kavramları somutlamak zor olabilir. Verdiğimiz örnekler tanıdık gelmediğinde kendi örneklerinizi bulmayı deneyebilirsiniz. Bulamadığınız durumlarda önerim kavramı zamana bırakmaktır.

💡 Konunun doğası gereği yazıların zorluk dereceleri arasında farklar oluştu. Her bir yazı için zorluk derecelerini başlıkta belirtmeye çalıştık. Okurlarımız zor yazıları sona bırakabilir. Ayrıca tüm yazılardan sonra tanımların bir dizinini ve kullandığımız terimler için İngilizce-Türkçe ve Türkçe-İngilizce sözlükleri bulabilirsiniz.

<sup>1</sup>Buradaki evrensellik yukarıda bahsettiğimizden farklı olarak ilgilendiğimiz tüm nesnelere içeren küme anlamında kullanıldı.

<sup>2</sup>Tabii ki bu belirleme tamamen keyfi değildir.

## Kategoriler Teorisi

## Kategoriler ☺☺☺

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Her ne kadar kısa bir geçmişe sahip olsa da kategoriler ve izleçler matematikte oldukça merkezi önemde bir konudur. Matematiksel nesnelerin ve yapıların birbirleri arasındaki ilişkilerini ve dönüşümlerini inceleyen kategoriler, soyutlama ve genelleştirme açısından oldukça güçlü bir araçtır. Bu haliyle birçok matematiksel alanın temelini oluşturur.

Kategoriler, bir veya daha fazla nesnenin ve bu nesnelere arasındaki okların (morfizmaların<sup>1</sup> ya da dönüşümlerin) bir araya gelmesiyle oluşan yapıdır. Bu morfizmalar, nesnelere arasındaki belli tür dönüşümleri tanımlayan matematiksel işlevler olmakla birlikte fonksiyon olmaları zorunlu değildir. Fonksiyon olmayan morfizma örneklerini aşağıda vereceğiz. Basit (ama yapay) bir örnek olarak,  $a, b$  ve  $c$  ile gösterilen üç nesneden oluşan bir kategori düşünelim. Böyle bir kategori sadece  $\alpha$  adını verebileceğimiz  $a$ 'dan  $b$ 'ye giden bir morfizmadan oluşabilir. Burada ne nesnelerin ne de  $\alpha$ 'nın ne olduğunun bir önemi olmaz.

Kategorilerin yapısını bileşke işlemi belirler. Bir kategorideki iki morfizmanın bileşkesi, bu iki morfizmanın ardı ardına uygulanmasıyla yeni bir morfizma oluşturur. Örneğin, herhangi bir kategoriden alacağımız  $a, b$  ve  $c$  nesnelere için  $a$ 'dan  $b$ 'ye ve  $b$ 'den  $c$ 'ye iki morfizmanın bileşkesi,  $a$ 'dan  $c$ 'ye bir morfizma oluşturmalıdır. Tabii ki bu morfizma kümeleri arasında bir işlem belirler. Bu bileşke işlemi birleşme özelliğine ve birim elemana sahip olmalıdır. Kategoriler şöyle tanımlanır:

**Tanım 1.** Bir kategori  $\mathcal{C}$ , aşağıdaki verilerden oluşur:

- $\text{Ob}(\mathcal{C})$  ile gösterilen bir nesne sınıfı.<sup>a</sup>
- Her iki nesne  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  için,  $f : A \rightarrow B$  ile gösterilen  $A$ 'dan  $B$ 'ye olan morfizmalar kümesi<sup>b</sup> ( $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ile gösterilir).  $f$  morfizması ayrıca bir ok veya dönüşüm olarak da adlandırılır.

<sup>1</sup>İngilizce “morphism” kelimesi Yunanca  $\mu\rho\phi\eta$  kelimesinden gelmektedir. Bu kelimeyi “form” ya da “şekil” olarak çevirmek mümkün ama kulağa doğal gelmiyor. Bu sebepten, İngilizcede olduğu gibi, biz de Yunancasını kullanacağız.

- Her üç nesne  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  için,  $(g, f) \mapsto g \circ f$  ile gösterilen bileşke işlemi,

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır:

- Bileşke işlemi herhangi  $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ve  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  ve  $h : C \rightarrow D$  morfizmaları için,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

eşitliğini sağlar.

- Her nesne  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  için,

$$\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$$

ile gösterilen bir kimlik<sup>c</sup> morfizması vardır ve dahası herhangi bir  $f : A \rightarrow B$  morfizması için  $\text{id}_B \circ f = f$  ve  $f \circ \text{id}_A = f$  eşitlikleri sağlanır.

<sup>a</sup>Sınıflar, kümelerin aksine, nesnelere/kümeler koleksiyonu olarak düşünülebilir.

<sup>b</sup>Morfizmaları da sınıf alan kategori tanımı yapılabilir, bu durumda bizim tanımımız “yerel küçük kategori” ile değiştirilmelidir. Giriş seviyesinde büyüklük problemlerinden biraz uzak kalabilmek için “küçük morfizmaları” kullanacağız.

<sup>c</sup>İngilizce “identity” morfizmasını “birim” olarak çevirmedik; çünkü ileride göreceğimiz gibi bu morfizmalar nesnelerin kimlikleri gibi görülebilir.

Kategori örneklerini matematiğin her alanında bulmak mümkündür. İşte birkaç örnek:

**Örnek 1. Küme kategorisi** Küme: İlk örneğimiz için nesnelere sınıfını tüm kümeler alalım. İki küme arasındaki morfizmalar

bu iki küme arasındaki tüm fonksiyonlar olsun,

$$\text{Mor}_{\text{Küme}}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ fonksiyon}\}$$

Morfizmaların bileşkesi fonksiyon bileşkesiyle verilir ve bir kümenin kimlik morfizması birim fonksiyondur.

**Örnek 2. Topolojik uzaylar kategorisi:** Bu kategori nesnelere olarak topolojik uzayları ve morfizmalar olarak bu uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonları içerir. Morfizmaların bileşkesi, fonksiyon bileşkesiyle ve bir uzayın kimlik morfizmasıyla birim fonksiyonla verilir.

**Örnek 3. Gruplar kategorisi:** Bu kategorinin nesnelere gruplardan ve morfizmaları da grup homomorfizmalarından oluşur. Morfizmaların bileşkesi grup homomorfizmaları arasındaki bileşkeyle verilir. Bir grubun kimlik morfizmasıyla o grubun birim homomorfizmasıdır.

**Örnek 4.** Bu iki örnek kolayca genellenebilir. Üzerinde cebirsel bir yapı olan kümeler sınıfı (vektör uzayları, halkalar, modüller, cebirler vs.) ve bu yapıyı koruyan morfizmalar bir kategori oluşturur.

Morfizmaların yapı koruyan fonksiyonlar olmadığı çok sayıda kategori de bulunmaktadır. Uygulamalarda da sık sık karşımıza çıkan bu kategorilere de birkaç örnek verelim.

**Örnek 5. Bağlılar kategorisi.** Nesnelere yine kümelerden oluşan bu kategorinin morfizmalarını tüm bağlantılar olarak alalım. Hatırlatma:  $A, B$  kümeleri verildiğinde  $A \times B$ 'nin her bir alt kümesine  $A$ 'dan  $B$ 'ye bir *bağlantı* denir.<sup>a</sup> Kategori oluşturmak için bileşke işlemine ihtiyacımız var. Bu tanım için  $U \subseteq A \times B$  ve  $V \subseteq B \times C$  olsun. Bu durumda,

$$V \circ U := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B (a, b) \in U \text{ ve } (b, c) \in V\}$$

olur. Dikkatli okuyucu  $U$  ve  $V$ 'nin fonksiyon olması durumunda yukarıdaki tanımın fonksiyon bileşkesi vereceğini farkedecektir. Ayrıca birim fonksiyon olan  $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$  bağlantısı yukarıdaki bileşke için kimlik morfizmasıdır. Dolayısıyla morfizmaların bağlantılar olduğu **Bğnt** kategorisini elde etmiş olduk.

<sup>a</sup>Bağlılar üzerine ek koşullar koyarak, fonksiyonları, kısmi sıralamaları, tam sıralamaları, denklik bağlantılarını vs elde edebiliriz.

**Örnek 6. Kategori olarak gruplar.** Morfizmaların elemanlardan tamamen bağımsız olduğu kategoriler de yaygındır. En temel örneği gruplardan elde edilen kategorilerdir. Bu örnek için bir grup seçip,  $G$  olsun, sabitleyelim. Kategori  $\mathfrak{G}$ 'nin sadece bir nesnesi,  $*$  diyelim, olsun. Bu durumda sadece  $*$   $\rightarrow$   $*$  morfizmaları belirlemeliyiz.

$$\text{Mor}_{\mathfrak{G}}(*, *) = G$$

olsun, yani,  $G$ 'nin her elemanı  $g$  için bir morfizmamız var. Bu morfizmayı da  $g$  ile gösterelim. Bileşke işlemiyle grup işlemi olarak tanımlayalım:  $g, h \in G$  ise,

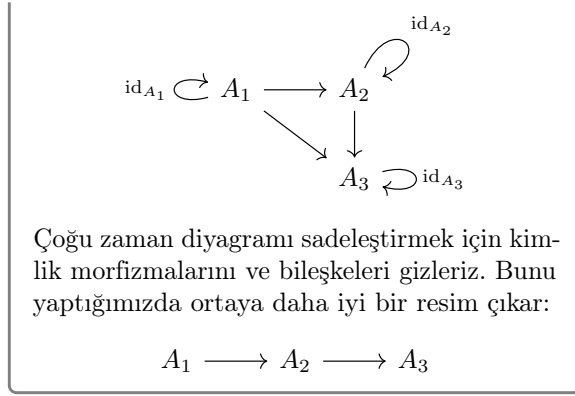
$$g \circ h := gh$$

Grup işleminin birleşme özelliği ve birim elemanı olduğundan  $\mathfrak{G}$  bir kategori olur. Yukarıda belirttiğimiz gibi bu kategorinin morfizmaları  $*$  nesnesinin elemanlarına uygulanabilecek fonksiyonlar değildir. Aslında  $*$  nesnesinin elemanlarından söz etmedik bile!

**Örnek 7. Kategori olarak kısmi sıralamalar.**  $P$  bir küme ve  $\leq$  ise  $P$  üzerinde bir bağlantı olsun. Eğer  $\leq$  bağlantısı yansıma (yani her  $x \in P$  için  $x \leq x$ ), geçişkenlik (yani her  $x, y, z \in P$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq z$  olduğunda  $x \leq z$  olması) ve anti-simetri (yani her  $x, y \in P$  için hem  $x \leq y$  hem de  $y \leq x$  olduğunda  $x = y$  olması) özelliklerini sağlıyorsa ( $P, \leq$ ) ikilisine bir *kısmi sıralı küme* deriz.

$(P, \leq)$  bir kısmi sıralı küme olsun.  $\mathcal{P}$  kategorisini şöyle tanımlayalım:  $\mathcal{P}$ 'nin nesnelere  $P$ 'nin elemanları olsun. Her  $x, y \in P$  için eğer  $x \leq y$  ise  $x$ 'ten  $y$ 'ye sadece bir tane morfizma olsun ve diğer durumlarda hiç morfizma olmasın. Geçişkenlik özelliği bize bileşke işlemi vermektedir. Bu tanımların  $\mathcal{P}$ 'yi kategori yaptığı açıktır.

**Örnek 8. Kategori olarak doğal sayılar.** Doğal sayıları kategorilerle eşlemek mümkün. Bunu yapmanın iki bariz yolu bulunuyor. Biz genel kabul göreni vereceğiz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathbf{n}$  kategorisini, nesnelere  $A_1, A_2, \dots, A_n$  olan ve sadece her  $i \leq j$  için, sadece bir tane  $A_i \rightarrow A_j$  morfizması bulunan kategori olarak tanımlayalım. Bileşke, mümkün olduğunda, aradaki tek morfizmayı verecek. Örneğimizin daha açık olması için  $n = 3$  durumuna göz atalım:



Kategori örneklerini çoğaltmak mümkün. Aslında bileşke işleminin var olduğu hemen hemen tüm matematiksel nesne topluluklarından kategori yapısı türetebiliriz. Daha çok örnek üretmek yerine aşağıdaki tabloda iyi bilinen kategorilerin bir listesini veriyoruz. Tanımlar önbilgi gerektirdiğinden, bazı örneklerde sadece tecrübeli okuyuculara hitap edeceğiz.

Kategori	Nesneler	Morfizmalar
<b>Rmod</b>	$R$ -modüller	$R$ -hom.
<b>Fvek</b>	$F$ -vektör uzayları	doğrusal dönüşümler
<b><math>G</math> - Küme</b>	$G$ -kümeler	$G$ -morfizma
<b>Hlk</b>	halkalar	halka hom.
<b>Grp</b>	gruplar	grup hom.
<b>Ab</b>	Abel grupları	grup hom.
<b>Banach</b>	Banach uzayları	sınırlı doğrusal dönüşümler
<b>Hilb</b>	Hilbert uzayları	

Son iki örneği analiz alanında da kategorileri kullanmanın mümkün olduğunu göstermek için ekledik. Bu yazılarda analitik kategorilerle ilgili daha fazla bilgi vermeyeceğiz. Örneklere göz attığımızda çok farklı alanlardan ve birbirleriyle ilgisiz çok sayıda kategorinin olduğunu fark ederiz. Hemen hemen tüm matematiksel nesnelere kategorize edip bir arada incelemeyi mümkün kılmak istiyoruz. Tabii bu çok zor bir hedef. Eğer soyut kategoriler için bir teorem kanıtlayabilirsek bu tüm kategorilerde geçerli olacaktır, yani hem gruplarda hem vektör uzaylarında hem kısmi sıralı kümelerde hem zircir komplekslerinde hem Banach uzaylarında vs. Bu gözlem bize iki şey söyler:

1. Tüm kategoriler için bir sonuç kanıtlamak zordur.
2. Tüm kategoriler için kanıtlanabilecek önermeler kolaydır.

<sup>2</sup>Ünlü bir kategoriler teorisi deyişi: “Perhaps the purpose of categorical algebra is to show that which is trivial is trivially trivial.” P. Freyd.

Çelişkili gibi görünebilir, ama değil! Her yerde geçerli olacak bir önerme bulmak zorken her yerde geçerli olan bir önermenin kolayca kanıtlanabilir olması gerektiğini söylüyoruz.<sup>2</sup> Şimdilik bu konuda endişeye yer yok; çünkü herhangi bir sonuç kanıtlamaya hazır değiliz. Kategorileri biraz daha irdelememiz gerekiyor.

Devam etmeden önce önemli bir özel duruma dikkat çekelim. Kategorilerin nesnelere sınıf oluşturur demistik. Eğer  $\mathcal{C}$  kategorisinin nesnelere bir küme oluyorsa  $\mathcal{C}$ 'ye *küçük kategori* denir.

Her matematiksel nesnenin alt-nesnelere merak ederiz. Kümelerin alt kümeleri, grupların alt grupları, uzayların alt uzayları vs. Kategorilerin de alt kategorilerini düşünmek mümkün tabii ki.

**Tanım 2.**  $\mathcal{C}$  kategorisi verilsin. Bu kategorinin bir *alt kategorisi*  $\mathcal{D}$ ,

1.  $Ob\mathcal{D} \subseteq Ob\mathcal{C}$  alt sınıfı,
2. Her  $X, Y \in \mathcal{D}$  için,

$$Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

alt kümesinden

oluşur. Her nesne  $X \in \mathcal{D}$  için, morfizmalar alt kümesi  $Mor_{\mathcal{D}}(X, X)$ ,  $X$ 'in  $\mathcal{C}$ 'deki kimlik morfizmasını içermelidir. Ayrıca  $\alpha \in Mor_{\mathcal{D}}(X, Y)$  ve  $\beta \in Mor_{\mathcal{D}}(Y, Z)$  ise  $\beta \circ \alpha \in Mor_{\mathcal{D}}(X, Z)$  olmalıdır. Buradaki bileşke işlemi  $\mathcal{C}$  kategorisindeki bileşke işlemidir.

Alt kategoriler için aşikâr örnekler üretmek zor değil. Yapılı kümeler kategorilerinde yapıyı azaltmak daha büyük bir kategori üretecektir: Gruplar kategorisi, kümeler kategorisinin; halkalar kategorisi, abel gruplar kategorisinin alt kategorisidir.

Bir diğer bariz örnek,  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $X \in \mathcal{C}$  nesnesi verildiğinde, tek nesnesi  $X$  ve bu nesnenin morfizmaları tam olarak  $Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$  olan  $\mathcal{T}_X$  kategorisidir. Tüm morfizmaları almak yerine, bileşke işlemi altında kapalı ve kimlik morfizmasını içeren herhangi bir alt küme de alabiliriz.

Bir kategoriden bazı nesnelere ve morfizmaları olarak üretilen alt kategoriler arasında özel bir örnek yukarıdaki  $\mathcal{T}_X$ 'in genellemesidir:

**Tanım 3.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$  bir nesnelere sınıfı olsun. Nesnelere  $\mathcal{X}$ 'in elemanları ve morfizmaları bu nesnelere arasında  $\mathcal{C}$ 'deki tüm morfizmalardan oluşan kategoriye,  $\mathcal{C}$ 'nin  $\mathcal{X}$  üzerindeki *tam alt kategorisi* denir. Bu kategoriyi  $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$  ile gösterelim.

Tam alt kategoriler uygulamalarda sıklıkla karşımıza çıkmaktadır ve kategori temsilleri teorisinde ana kategorinin temsilleriyle tam alt kategorinin temsilleri arasında sıkı ilişkiler bulunur.

Yazımızın girişinde kategorilerin nesnelere çok morfizmalara odaklandığını söylemiştik. Yine de bazı nesnelere diğerlerinden daha çok öne çıkmayı başarır. Bunun en temel örnekleri baş, son ve sıfır nesnelere dir. Şimdi bunları tanımlayalım.

**Tanım 4.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $b, s \in \mathcal{C}^a$  olsun.

1. Eğer her  $x \in \mathcal{C}$  için  $|\text{Mor}_{\mathcal{C}}(b, x)| = 1$  ise  $b$ 'ye  $\mathcal{C}$ 'nin bir *baş* nesnesi denir.
2. Eğer her  $x \in \mathcal{C}$  için  $|\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, s)| = 1$  ise  $s$ 'ye  $\mathcal{C}$ 'nin bir *son* nesnesi denir.
3. Eğer  $o \in \mathcal{C}$  hem baş hem de son nesneyse,  $o$ 'ya  $\mathcal{C}$ 'nin bir *sıfır* nesnesi denir.

<sup>a</sup>Nesnelere için büyük harf kullanıyorduk, ama bu özel durumda için küçük harfleri tercih ettik.

Her ne kadar açık olsa da tekrar edelim:

- Baş nesnedenden her nesneye bir ve yalnız bir morfizma gider. Yani, baş nesnelere diğer bütün nesnelere *ilişki* içindedir. Ama tersi olmak durumunda değildir, yani her bir nesnedenden baş nesneye morfizma bulunmayabilir.
- Her nesnedenden son nesneye bir ve yalnız bir morfizma bulunur. Yine tersi doğru olmayabilir, son nesneye ilişkili, kendisi dışında, hiç bir nesne olmayabilir.
- Son olarak, sıfır nesnesi hem diğer her bir nesneye biricik bir ilişki içindedir hem de her bir nesnenin bu nesneye biricik bir ilişkisi vardır.

Bu yorumları yapma sebebim şu soru: Teknik detayları görmeden, insan ilişkileri kategorisini düşünelim, yani nesnelere biz insanlar, morfizmalarımızsa seçimini size bıraktığım ilişkiler olsun (bileşke de düşünmeye çalışım!). Bu durumda baş, son ve sıfır insanlar hakkında ne söyleyebilirsiniz?

**Örnek 9.** İlk örneğimiz kümeler kategorisi **Küme**. Baş kümemiz, herhangi bir kümeye sadece bir tane fonksiyon tanımlayabileceğimiz bir küme olacak. Ama eğer  $b$  kümesinde  $x$  elemanı varsa,  $b \rightarrow \{1, 2\}$  kümesine 2 farklı fonksiyon tanımlayabiliriz. Dolayısıyla  $b$ 'nin elemanı olması durumunda bazı kümelere birden çok fonksiyon yazılabilir. Eğer  $b = \emptyset$  alırsak,  $b$ 'den herhangi bir kümeye sadece bir fonksiyon bulunur (boş fonksiyon!). Dolayısıyla  $\emptyset$  kümesi **Küme** kategorisinin baş nesnesidir.

Peki son küme hangisi olacak? Bu kez boş küme olamaz; çünkü her ne kadar boş kümeden çıkan bir fonksiyon olsa da boş olmayan bir kümeden boş kümeye giden bir fonksiyon olamaz! Verilen bir  $A$  kümesinin her bir elemanını son küme  $s$ 'nin bir elemanına götürmeliyiz. Eğer  $s$ 'de iki eleman olursa, o zaman  $s$ 'ye doğru iki farklı fonksiyon yazabiliriz. Demek ki  $s$ 'de en çok bir eleman olabilir. Ama eleman olması da gerekliydi, öyleyse,  $s = \{\ast\}$  olmalı. Şimdi,  $A \rightarrow s$  olan sadece bir fonksiyon vardır ve  $A$ 'nın tüm elemanlarını  $\ast$ 'a götürür. Öyleyse bir elemanlı her küme son kümedir.

**Alıştırma 1.** *Aşına olduğunuz diğer kategoriler için baş, son ve sıfır nesnelere bulunmaya çalışın. Basit örnekler gruplar, vektör uzayları ve halkalar olabilir.*

Yukarıdaki örneğimizde baş kümenin biricik olduğu aşıkardı: Sadece bir tane boş küme var! Ama son küme biricik değil:  $\{\bullet\}$  ya da  $\{1\}$  ya da bir elemanlı herhangi bir küme son küme olabilir. Genel olarak baş ve son nesnelere var olmak zorunda olmakla birlikte, var olduklarında da biricik olmak zorunda değildirler.

Bu durum bizi başka bir soruya ulaştırıyor: Nesnelere "aynı" ya da "denk" ya da "eşyapılı" olması ne demektir? Bu sorunun yanıtını kümeler için biliyoruz: İki kümenin aynı olması, bu kümelerin tam olarak aynı elemanlardan oluştuğu anlamına gelmektedir. Yine de karşımıza çıkan birçok durumda aynı sayıda elemanı olan (daha doğrusu, kardinaliteleri aynı olan) kümeleri birbiriyle eş tutarız; çünkü kardinaliteler aynı olduğunda, kümeler arasında birebir ve örten bir eşleme bulunur ve gerektiğinde bu eşlemeyi kullanıp kümeler arasında geçiş yapabiliriz!

Ancak aynı şeyi gruplar ya da vektör uzayları için söyleyemeyiz. Örneğin, düzlemde (yani 2 boyutlu gerçel vektör uzayında), orijinden geçen tüm doğrular 1 boyutlu vektör uzaylarıdır. Böyle iki doğru alalım,  $\ell_1, \ell_2$ . Eğer bu iki doğrunun kesişimi orijineyse, o zaman bu doğrular farklı noktalar içer-

diklerinden küme olarak eşit değillerdir. Tabii ki  $\ell_1$  ve  $\ell_2$  arasında birebir ve örten fonksiyonlar bulunur, yani bu iki kümeyi birbirine eş tutabiliriz. Ama dikkat ederseniz, bu kümeler arasındaki her eşleme vektör uzayı yapısına saygı duymaz, orijini orijine bile götürmeyebilir!

Yine de doğrusal cebirden bildiğimiz gibi, bu yapıya saygı duyan eşlemeler de vardır ve hatta, vektör uzayları olarak,  $\ell_1$  ile  $\ell_2$  arasında bir fark yoktur!

Aslında, boyutları aynı olan herhangi iki vektör uzayı (aynı cisim üzerinde olmaları koşuluyla) eşyapılıdır.<sup>3</sup> Daha net bir ifadeyle,  $\ell_1$  ve  $\ell_2$  arasında, vektör uzayı yapısını koruyan birebir ve örten bir fonksiyon bulabiliriz.

Bu örnekleri kategoriler teorisine gömmeye çalışalım: Öncelikle **Küme** kategorisinde iki kümenin aynı olması, nesnelere sınıfının elemanları olarak eşit olmak demektir. Diğer taraftan, eğer iki küme arasında birebir ve örten bir fonksiyon varsa, yani **Küme** kategorisindeki bu iki nesne arasında tersinir bir morfizma bulunuyorsa, bu iki küme eşyapılı deriz.

Benzer şekilde,  $F$  cisimi üzerindeki **FVek** kategorisini tanımlamıştık.  $F = \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda yukarıdaki  $\ell_1$  ve  $\ell_2$  uzayları **FVek**'in nesnelere olur. Ama **FVek**  $\subseteq$  **Küme** olduğundan,  $\ell_1$  ve  $\ell_2$  aynı zamanda **Küme**'nin de nesnelere. Bu iki nesnenin vektör uzayı olarak aynı olması için öncelikle **Küme** olarak aynı olması gerekir; ama bu tam olarak aynı vektörlerden oluşmak demektir. Daha zayıf şekilde, küme olarak eşyapılı olmaktan bahsedebiliriz, ama bu koşul da beklentimizi tam olarak karşılamaz; çünkü sonlu boyutlu ve sıfır olmayan tüm gerçel vektör uzaylarının kardinaliteleri birbirine eşittir. Kolaylıkla tahmin edebileceğiniz gibi, doğru eşyapılı olma tanımı, **FVek** kategorisinde tersinir bir morfizma bulmaktır.

**Tanım 5.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $X, Y \in \mathcal{C}$  nesnelere verilsin. Eğer

$$1. f \circ g = \text{id}_Y \quad \text{ve} \quad 2. g \circ f = \text{id}_X$$

koşullarını sağlayan  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow X$  morfizmaları varsa,  $X$  ile  $Y$  eşyapılıdır deriz ve  $X \cong Y$  yazarız. Ayrıca  $f$  ve  $g$  morfizmalarını *izomorfizma* olarak adlandırırız.

Yaptığımız tanımla birlikte eşyapılı olma sorununu herhangi bir kategorideki nesnelere için sorabiliriz. Tecrübeleri okurlar hali hazırda gruplar, halkalar, modüller, topolojik uzaylar vs için eşya-

<sup>3</sup>Morfizma kelimesini kullanmaya devam edersek eşyapılı yerine izomorfik de denilebilir, ama eşyapılı daha güzel bir karşılık!

<sup>4</sup>Son iddiamız biraz yersiz görünebilir; çünkü bir elemanlı kümeler arasında birden fazla fonksiyon zaten olamaz!

pılı olma tanımını biliyor olmalı! Bu tanım, tabii ki yukarıdaki tanımla örtüşüyor.

Dikkat ederseniz “aynı” olmayı “eş-yapılı” olmaya zayıflattık. Bu bize eşit olmasa da denk yapıları tekrar tekrar çalışmaktan kurtarır.

**Örnek 10. Grubumsular.** Yukarıda bir grubu kategori olarak görmüştük. Bu kategorilerin bir özelliği de tüm morfizmaların izomorfizma olmasıdır. Birden çok nesnesi olan, ama tüm morfizmaları izomorfizma olan bir kategoriye *grubumsu* denir. Kolayca görüleceği gibi,

1. eğer  $\mathcal{G}$  bir grubumsuysa, her  $a \in \mathcal{G}$  için  $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(a, a)$  kümesi kategorinin bileşkesi altında bir grup olur.
2. Ayrıca  $a, b \in \mathcal{G}$  verildiğinde  $a \rightarrow b$  morfizmasının varlığı  $a$ 'nın  $b$ 'yle eşyapılı olmasına denktir.

**Örnek 11. Bir kategorinin “iskeleti”.**  $\mathcal{C}$  bir kategori olsun. Alt kategori  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $\mathcal{D}$ 'ye  $\mathcal{C}$ 'nin bir *iskeleti* denir.

- $\mathcal{D}$  tam alt kategoridir.
- $\mathcal{D}$ , her  $X \in \mathcal{C}$  ile eşyapılı bir nesne içerir.
- $\mathcal{D}$ 'nin nesnelere arasında birbiriyle eşyapılı iki nesne yoktur.

Örnek olarak, eğer  $\mathcal{C} = \mathbf{Küme}$  alırsak, kardinal sayıların oluşturduğu tam alt kategori **Kar** kümeler kategorisi için bir iskelettir. Eğer  $\mathcal{C}$  sonlu kümelerin kategorisi **SnIKm** olursa, bu kez doğal sayıların oluşturduğu tam alt kategori iskelet olacaktır.

Her kategorinin bir iskeleti olması sınıflar için seçme aksiyomunu kabul etmeye denktir.<sup>a</sup> Ayrıca bir kategorinin tüm iskeletleri birbiriyle eşyapılıdır. (!)

<sup>a</sup>Yazar için bu bir sorun değil!

Baş ve son nesnelere geri dönelim. Kümeler için son nesnenin biricik olmadığını görmüştük. Ama yeni tanımımızla tüm son kümelerin birbiriyle eşyapılı olduğu aşikâr. Hatta aradaki izomorfizma da biricik, yani  $\{\bullet\}$  ve  $\{1\}$  son nesnelere arasında biricik izomorfizma vardır!<sup>4</sup> Bu gözlemi herhangi bir kategoriye ve baş nesnelere uygulamak mümkün.

**Teorem 1.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $b \in \mathcal{C}$  bir baş nesne olsun. Bu durumda, herhangi başka bir baş nesneyle  $b$  arasında biricik izomorfizma bulunur. Özel olarak, baş nesne, izomorfizmalar altında, biriciktir.

*Kant.* Önermeyi kanıtlamak üzere,  $b' \in \mathcal{C}$  baş nesnesini alalım. Şimdi  $b$  baş nesne olduğundan  $b \rightarrow b'$  olan yalnız ve yalnız bir morfizma bulunur, bu morfizmayı  $\beta : b \rightarrow b'$  ile gösterelim. Aynı sebepten,  $b'$  de baş nesne olduğundan,  $\gamma : b' \rightarrow b$  biricik morfizması da vardır. Bulduğumuz morfizmaların bileşkesini alırsak,

$$\gamma \circ \beta : b \rightarrow b \quad \text{ve} \quad \beta \circ \gamma : b' \rightarrow b'$$

morfizmalarını elde ederiz. Diğer yandan, baş nesnelere herhangi bir nesneye biricik morfizma bulunuyordu, yani  $b'$ 'den  $b$ 'ye ve  $b$ 'den  $b'$ 'ye biricik morfizmalar bulunur. Ama halihazırda bu nesnelerin kimlik morfizmaları vardır, o zaman kendine giden başka morfizma bulunmamalıdır, yani,

$$\gamma \circ \beta = \text{id}_b \quad \text{ve} \quad \beta \circ \gamma = \text{id}_{b'}$$

buluruz. Bu eşitlikler,  $\beta$  ve  $\gamma$ 'nin birer izomorfizma olduğunu ve birbirlerinin tersi olduklarını verir.  $\beta$  ve  $\gamma$ 'nin biricik olmaları baş nesne tanımından gelmektedir.  $\square$

Yukarıdaki teoremden ve kanıtında çok küçük değişiklikler yaparak son nesnelerin ve dolayısıyla sıfır nesnelerin de izomorfizma altında biricik olduğunu kanıtlayabiliriz. Bunun yerine ikililik kavramından bahsedeceğiz. Giriş yazımızda da bahsettiğimiz üzere, ikililik kategori teorisinin önemli kavramlarından birisidir. Bu kavramı en temel durumda karşıt kategorilerle tanımlayabiliriz.

**Tanım 6.**  $\mathcal{C}$  kategorisi verilsin.  $\mathcal{C}$ 'nin karşıt kategorisi  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 'de morfizmaları ters çevirerek elde edilir ve  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ile gösterilir. Daha net olarak,  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  kategorisinde,

1. nesnelere  $\mathcal{C}$ 'nin nesnelere,
2.  $X, Y \in \mathcal{C}^{\text{op}}$  ise,

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

olarak tanımlanır ve

3.  $\alpha^{\text{op}} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$  ve  $\beta^{\text{op}} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z)$  ise,

$$\beta^{\text{op}} \circ \alpha^{\text{op}} = (\alpha \circ \beta)^{\text{op}}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımda morfizmaların yönünü soyut olarak çevirdiğimizi unutmayın! Aslında küme olarak  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$  ile  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  birbirine eşittir. Aradaki farkı hatırlamak için, karşıt kategoriden aldığımız morfizmaların üzerine  $\text{op}$  işaretini koyacağız. Ayrıca  $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$  olacağı aşikârdır.

**Örnek 12.** Küme kategorisinin karşıt kategorisinin nesnelere kümelerdir. Ama  $\mathbf{Küme}^{\text{op}}$ 'da  $X \rightarrow Y$  morfizmaları  $Y$ 'den  $X$ 'e giden fonksiyonlar olarak tanımlanmalıdır. Dikkat ederseniz, bu tanımla birlikte karşıt kategori  $\mathbf{Küme}^{\text{op}}$ 'un morfizmaları artık fonksiyon değildir.

Şimdi ikililik ilkesini açıklamayı deneyelim:

Eğer  $p$  önermesi tüm kategorilerde doğruysa, özel olarak hem  $\mathcal{C}$  hem de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  kategorilerinde doğru olacaktır. Dolayısıyla bu tür her önermeden, önermenin içerdiği morfizmaların yönünü değiştirerek elde ettiğimiz önerme de bütün kategorilerde doğrudur.

Ancak,  $p$ 'nin  $\mathcal{C}$ 'deki yorumu ile  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 'taki yorumları birbirinden farklıdır. İlkeyi daha iyi özümsemek için baş nesne - son nesne ikililiğine göz atalım.

Öncelikle tanımı hatırlarsak,  $b \in \mathcal{C}$ 'nin baş nesne olması, her  $x \in \mathcal{C}$  için,

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(b, x)$$

kümesinin bir elemanlı olmasına, yani, biricik  $b \rightarrow x$  morfizmasının varlığına denkti. Peki  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  kategorisinde baş nesne hangi koşulu sağlar? Yazalım:  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}^{\text{op}}$  baş nesne olması için,  $x \in \mathcal{C}^{\text{op}}$  verildiğinde

$$|\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{b}, x)| = 1$$

olmalıdır. Ama

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{b}, x) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, \mathbf{b})$$

eşitliği sağlamıyordu. Öyleyse,

$\mathbf{b} \in \mathcal{C}^{\text{op}}$  bir baş nesnedir ancak ve ancak  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}$  bir son nesnedir

önermesi doğrudur. Bir diğer ifadeyle,

**Önerme 1.**  $\mathcal{C}$ 'deki baş nesnelere  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 'taki son nesnelere birebir eşleşir.

Bu ve benzer tüm önermelere *ikili önerme* denir. Ayrıca baş nesne ve son nesnenin birbirinin karşıtı ya da eşleştiğini söyleriz.

Henüz ikililik ilkesini uygulamadık. Yukarıdaki Teorem 1'e uygulayalım. İki kere okumanız gerekebilir:

Teorem 1'i tüm kategoriler için kanıtladık, yani bütün kategoriler için doğru. Öyleyse özel olarak, verilen her  $\mathcal{C}$  kategorisi için doğru olduğu gibi  $\mathcal{C}$ 'nin karşıt kategorisi  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  için de doğrudur. Şimdi eğer  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  kategorisinde baş nesne varsa, izomorfizmalar altında biriciktir. Ama yukarıdaki eşlemeden dolayı, bu aynı zamanda, " $\mathcal{C}$  kategorisinde son nesne varsa, izomorfizmalar altında, biriciktir" anlamına da gelir.

Öyleyse ikililiği kullanıp aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk.

**Teorem 2.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $s \in \mathcal{C}$  bir son nesne olsun. Bu durumda, herhangi başka bir son nesneyle  $s$  arasında biricik izomorfizma bulunur. Özel olarak, son nesne, izomorfizmalar altında, biriciktir.

İlerleyen bölümlerde bu fikri kullanarak yapabileceğimiz kanıtları, "ikililik ilkesinden" notuyla okuyucuya bırakacağız.

**Not 1.** Sıfır nesnelere aynı anda hem baş hem de son olduklarından biricik olmaları gerektiği açıktır.

Çoğu zaman eşyapılı olmayan nesnelere de kıyaslamak isteriz. İki nesne arasında morfizma olması bir kıyas olsa da çoğu durum için iyi bir kıstas (ölçüt) değildir. Yine kümeler için düşünürsek, boş olmayan iki küme arasında her zaman sabit fonksiyon(lar) tanımlayabiliriz. Ama bu fonksiyonların varlığı  $X$  ve  $Y$  hakkında kayda değer ek bilgi vermez. Ancak, örneğin,  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun birebir olduğu bilgisi önemli bir ek bilgidir. Dolayısıyla, izomorfizma olmayan; ama karşılaştırma ölçütü olabilecek morfizma türleri vardır.

Buradaki soru birebir olmayı *kategoriik* olarak nasıl ifade edeceğimizdir. Tanımı hatırlayalım:  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu,

$$\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \implies a = b$$

koşulunu sağlıyorsa  $f$ 'ye *birebir* denir, yani farklı iki elemanın  $f$  altındaki görüntüleri de farklı olmalıdır. Kategoriler teorisini anlamaya başlayanlar buradaki sorunu hemen fark etmiş olmalı: Bu tanım elemanları kullanıyor! Kategoride elemanlar değil morfizmalar önemliydi ve morfizmalar fonksiyon olmak zorunda bile değil!

Bu sorunu aşmak çok da zor değil, çünkü birebirlik ve benzer bir zorluk çıkarma potansiyeline sahip örtenlik, elemanlara atıf yapmadan da tarif edilebilir. Kümeler arasındaki fonksiyonlar söz

konusuyken, bir fonksiyonun birebirliği soldan tersinin olmasına, örtenliği sağdan tersinin olmasına denktir. Kategoriler teorisi içinde bu özellikleri sa-  
deleştirmeler aracılığıyla vereceğiz.

**Tanım 7.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $f : X \rightarrow Y$  morfizması verilsin.

- Her  $Z \in \mathcal{C}$  ve her  $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$  için,

$$f \circ h_1 = f \circ h_2 \implies h_1 = h_2$$

sağlanıyorsa  $f$ 'ye *monomorfizma* ya da kısaca *mono*,

- Her  $Z \in \mathcal{C}$  ve her  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$  için,

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \implies g_1 = g_2$$

sağlanıyorsa  $f$ 'ye *epimorfizma* ya da kısaca *epi*

denir.

Özel durumda,  $\mathcal{C} = \mathbf{Küme}$  olursa, monomorfizmanın birebirlik, epimorfizmanın örtenlik olduğunu göstermek zor değildir, bunu okuyucumuza ödev olarak bırakıyoruz.

Aşikâr olmayan örnek arayalım. İlk aklımıza gelen soru bir üst paragraftaki ödevin ne kadar genel geçerli olduğu olmalıdır, yani morfizmaların yapı koruyan fonksiyonlar olduğu durumlarda, benzer eşitlikler var mıdır? Bu sorunun cevabı yapıya bağlı.

**Alıştırma 2.** Gruplar kategorisinde morfizmalar grup yapısını koruyan fonksiyonlardır. Bu morfizmalar için birebirlik monomorfikliğe, örtenlikse epimorfikliğe denktir.

Bu alıştırma ile birlikte iddianın her zaman doğru olabileceği yanılgısına kapılmayalım. Ancak bu doğru değil. Basit örnek vermesi kolay değil, ama yapay örnek üretebiliriz.

**Örnek 13.**  $X, Y \in \mathbf{Küme}$  ve  $f : X \rightarrow Y$  birebir olmayan bir fonksiyon olsun.  $\mathbf{Küme}$ 'nin  $f$ 'yi içeren en küçük alt kategorisi  $\mathcal{C}_f$ 'yi düşünelim. Bu kategorinin nesnelere  $X$  ve  $Y$  olacak, ayrıca  $\text{id}_X$  ve  $\text{id}_Y$  kimlik morfizmalarını da içerecektir. Son olarak  $f$  morfizmasını da ekleyelim. Bileşke işlemi yine fonksiyon bileşkesi olsun.

Soru:  $f$  monomorfizma mıdır?

Sadece 3 tane morfizmamız ve iki olası bileşkemiz olduğundan koşulu kontrol etmek ve koşulun sağlandığını görmek kolay. Dolayısıyla  $f$  fonksiyonu

$\mathcal{C}_f$  kategorisinin morfizması olarak monomorfizmadır. Ancak fonksiyon olarak değerlendirdiğimizde, seçimimizden dolayı birebir değildir.

Dikkatli okuyucularımız monomorfizmaların ve epimorfizmaların da karşıt kavramlar olduğunu fark etmiştir. Gerçekten de tanımda tüm morfizmaların yönlerini değiştirdiğimizde bu kavramların yer değiştirdiğini görebiliriz.

**Aliştırmaya 3.** Her izomorfizmanın hem mono hem de epi olduğunu gösteriniz.

**Aliştırmaya 4.** Yukarıdaki alıştırmanın tersi her zaman doğru değildir. Bir morfizmanın hem epi hem de mono olması o morfizmanın izomorfizma olmasını gerektirmez. Örnek bulmayı deneyebilirsiniz.

**Not 2.** Genel olarak, anlamlı olduğunda, monomorfizmaların birebir olduğunu göstermek zor değildir. Ancak aynı iddiayı epimorfizmalar için öne süremeyiz. Aliştirmaları yapagelen okurlarımız bunun doğruluğunu gruplar arasındaki epimorfizmaların örten olduğunu gösterirken anlamış olmalı!

### Kaynaklar.

Kategoriler teorisi üzerine yazılmış çok sayıda iyi kaynak bulunuyor. Buradaki yazıların tamamı standart bir giriş oluşturduğundan hemen hemen tüm kaynaklarda benzer sonuçlar bulunuyor. Bu sebepten yazı içinde atıf vermedik. Yazıları hazırlarken yanımda bulunan kaynakların listesini aşağıda bulabilirsiniz.

Kategoriler teorisini yeni öğrenmeye başlayanlar için önereceğim kaynak Leinster'in kitabı olabilir. Bu kitabı Boğaziçi Üniversitesi'nde 1 dönem seçmeli ders olarak okuttum ve ayrıca 3 ayrı dönemde toplam 10 öğrenciyle bitirme projesi olarak çalıştık. Hem temel örnekler sunması hem de değişik yaklaşımlar getirmesiyle iyi bir başlangıç kitabıdır.

Daha tecrübeli matematikçiler için Mac Lane daha iyi bir seçimdir. Temel teoriyi sağlam bir şekilde öğretiyor. Ama özellikle lisans seviyesinde ya da cebirsel yapılarda tecrübesiz okuyucular için tavsiye etmiyorum. Eilenberg -Mac Lane makalesi de iyi bir başlangıç olabilir ancak ilk makale olduğundan "adjoint" izleçler ya da Yoneda Önsavı gibi temel konular yer almıyor.

Cebirsel teorilere yönelimli okurlar için Berrick-Keating'i de öneririm. Bu kitap için iyi bir modüller

teorisi altyapısı gereklidir. Benzer bir diğer kaynak Borceux'nun kitabıdır.

Biraz daha uygulama ağırlıklı okumalar için Grandis'i de öneririm, ama matematikçiler için biraz "değişik" bir kitap.

Bu kaynaklar tabii ki en temel sonuçları içeriyor. Daha derin ve yüksek seviye sonuçlar için çok sayıda değerli kaynak bulunuyor, bu yazıda üzülmek bu kitaplara yer veremiyoruz.

Son önerimizse bir web sayfası. Her ne kadar web kaynaklarında önemli güven sorunları olsa da ncatlab sayfaları saygın matematikçilerin kontrolünde gelişen güvenilir bir kaynaktır. Kategoriler hakkında hemen hemen her şeyi buradan okumak mümkün.

### Kaynaklar

- [1] Berrick, A. J., Keating, M. E., *Categories and Modules with K-theory in view*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 67, Cambridge University Press, UK, 2000.
- [2] Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.
- [3] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231 - 294.
- [4] Grandis, M., *Category Theory and Applications*, World Scientific, New Jersey, 2018.
- [5] Leinster, T., *Basic Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143, Cambridge University Press, UK, 2014.
- [6] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5 Springer, 1997
- [7] <http://www.ncatlab.org>

**Teşekkürler.** Birkaç ay önce Alp hoca, Ali Karatay'ın tezi üzerine bir yazı hazırladıklarını söyledi. Tez kategoriler teorisi üzerineydi ve benim de bu teoriye bir giriş yapmayı isteyip istemediğimi sordu. Bir süre önce MD için kategoriler hakkında bir kapak konusu planlayıp vazgeçmiştim; ama Alp hocanın isteği üzerine bu plan canlandı ve bu sayıda gördüğümüz yazılar ortaya çıktı, kendisine hem cesaretlendirmesi hem de yazıları okuduğu için teşekkür ederim. Ayrıca İlhan İkedâ'ya, Ruslan Muslumov'a, Deniz Yılmaz'a ve lisans öğrencilerimden Musa Bakır'a yazıları okuyup hataları düzeltmeme yardımcı oldukları için teşekkür ederim.

## Kategoriler Teorisi

## Limit ve Eş-limit ☺

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Kategorilerin aslen izleçleri ve doğal dönüşümleri anlamak üzere üretilen yapılar olduğunu biliyoruz. Bu açıdan bakıldığında bir an önce izleç kavramını tanımlamamız gerektiği düşünülebilir. Ancak kategoriler teorisinin en dikkat çeken uygulamalarından biri evrensel nesnelere ve limit/eş-limit hesaplarıdır. Bu kavramlar sadece kategoriler kullanılarak tanımlanır ve aslen zor kavramlar değildir. Yine de ilk okumada anlaşılması zor olabilir. Genel sunumların aksine limitlere öncelik verip bu bölümde tartışmaya başlayacağız.<sup>1</sup>

Öncelikle diyagramlardan bahsedelim.

**Tanım 1.**  $\mathcal{C}$  kategorisinde bir *diyagram*,  $\mathcal{C}$ 'nin bazı nesnelere ve bu nesnelere arasındaki bazı morfizmalarından oluşan kümedir. Bir diyagramı genellikle, bu kümedeki nesnelere köşelerde olduğu, morfizmaların ise yönlü kenarları oluşturduğu graflarla gösteririz.

Diyagramları kategoriler teorisi kavramlarını betimlemek ve evrensel nesnelere kurmakta kullanırız.

**Örnek 1.** Sık kullanılan diyagram örneklerini görelim:

$$A_1 \quad A_2$$

Sadece iki nesneden oluşan bu diyagram biraz uçta olsa da önemlidir. Bir diğer temel örnek aynı hedefe doğru giden iki morfizmanın olduğu diyagramdır.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow a & \\ B & \xrightarrow{b} & C \end{array}$$

Son olarak en standart örneklerden biri olan kare diyagramı görelim:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow a \\ B & \xrightarrow{b} & C \end{array}$$

Çok daha karmaşık diyagramlar da kurmak mümkün ama şimdilik yapmayacağız.

Diyagramları rasgele kurmak mümkün olsa da değişmeli olanlar daha işe yarar örneklerdir. Bir diyagramın *değişmeli* olması, verilen iki nesneyi birbirine bağlayan tüm morfizmaların bileşkelerinin birbirine eşit olması anlamına gelir. Yukarıdaki örneklerin ilk ikisinde bileşke alabileceğimiz morfizmalar yok. Kare diyagramın değişmeli olmasıysa,

$$a \circ f = b \circ g$$

eşitliğin sağlanması anlamına gelmektedir.

**Örnek 2.** Bir diğer sık karşılaşılan diyagram örneğine de göz atalım.

$$Q \xrightarrow{q} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

Bu kez diyagramın değişmeli olması,

$$f \circ q = g \circ q$$

eşitliği demektir.

**Alıştırma 1.** Aşağıdaki diyagramda verilen karelerin değişmeli olması durumunda çevreyi saran dikdörtgenin de değişmeli olduğunu kanıtlayınız.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow{e} & F \end{array}$$

Diyagramların çok sayıda uygulaması bulunmaktadır. Bu bölümde önce evrensel nesnelere sonrasındaysa limitlerden bahsedeceğiz. İlk evrensel nesnemiz, iki nesnenin çarpımı olacak.

<sup>1</sup>Tercih eden okuyucu önce izleçler yazımızı okuyup sonrasında bu yazıya dönebilir. Hatta ilk kez kategoriler teorisi okuyan okurlara limitleri sona bırakmalarını tavsiye ederiz.

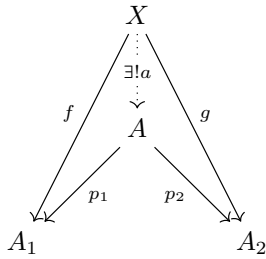
**Tanım 2.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$  olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan her  $A \in \mathcal{C}$  nesnesine bu nesnelerin bir *çarpımı* denir:

$p_1 : A \rightarrow A_1$  ve  $p_2 : A \rightarrow A_2$  morfizmaları vardır ve verilen her  $f : X \rightarrow A_1$  ve  $g : X \rightarrow A_2$  morfizmaları için biricik  $a : X \rightarrow A$  morfizması vardır ve

$$p_1 \circ a = f \text{ ve } p_2 \circ a = g$$

eşitlikleri sağlanır.

Çarpım tanımının kuralını bir değişmeli diyagramla ifade etmek mümkün:



Bir diğer deyişle,  $A_1$  ve  $A_2$ 'nin çarpımı, bu iki nesneye giden morfizmaları olan ve dahası, bu iki nesneye morfizmaları olan her nesneden, diyagramdaki üçgenleri değişmeli yapan biricik morfizma kabul eden nesnedir.

**Örnek 3.** En temel örneğimiz **Küme** kategorisiydi.  $A_1, A_2 \in \mathbf{Küme}$  olsun. Bu durumda kategorik çarpımın kartezyen çarpım olacağını görmek kolaydır. Gerçekten,  $A = A_1 \times A_2 = \{(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$  olursa,  $p_1$  birinci ve  $p_2$  ikinci koordinata izdüşüm fonksiyonları olarak seçilebilir. Şimdi eğer  $f : X \rightarrow A_1$  ve  $g : X \rightarrow A_2$  fonksiyonları verilirse,

$$a : X \rightarrow A, x \mapsto (f(x), g(x))$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımla  $a$ 'nın yukarıdaki diyagramı değişmeli yapacağı açıktır. Bir diğer koşul,  $a$ 'nın verilen koşulu sağlayan biricik fonksiyon olduğuydu. Eğer  $a' : X \rightarrow A, x \mapsto (x_1, x_2)$  diyagramı değişmeli yapıyorsa, her  $x \in X$  için,

$$p_1 \circ a'(x) = f(x) \text{ ve } p_2 \circ a'(x) = g(x)$$

olmalı. Ama

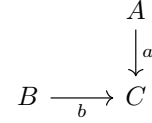
$$p_1 \circ a'(x) = p_1(x_1, x_2) = x_1$$

olacağından  $x_1 = f(x)$  buluruz. Benzer şekilde  $x_2 = g(x)$  de bulunur.

Bu örneği takip ederek, herhangi bir kategori

$\mathcal{C}$ 'de  $A$  ile  $B$  nesnelerinin çarpımı varsa, bu çarpımı  $A \times B$  ile göstereceğiz.

**Örnek 4.** İki nesnenin çarpımı var olmayabilir. Yine doğal örnekler tüm okurlarımıza hitap etmeyebileceğinden basit bir örnek kurulum. Kategorimiz  $A, B, C$  nesnelere oluşsun ve aralarındaki morfizmaları aşağıdaki gibi gösterelim.



Yani, kimlik morfizmaları dışında sadece  $A \rightarrow C$  bir tane morfizma ve  $B \rightarrow C$  bir tane daha morfizma olsun. Kategori aksiyomlarının sağlandığı açıktır. İddiamız, bu kategoride  $A$  ile  $B$ 'nin çarpımının olmadığı. Gerçekten de eğer böyle bir nesne olsaydı, bu nesneden hem  $A$ 'ya hem de  $B$ 'ye birer morfizma olması gerekirdi. Ama şekilden de görüleceği gibi  $B$ 'ye giden hiç morfizma yoktur! Dolayısıyla çarpım da yoktur!

**Not 3.** Bazı nesnelerin çarpımlarının var olup bazılarının var olmadığı kategoriler de bulunur. Yukarıdaki örneği bu şekilde değiştirmek mümkün! Bu değişikliği yapmayı, okuyucumuza ödev olarak bırakıyoruz.

İkililik kavramından bahsederken, her tanımlı morfizmaların yönlerini ters çevirerek karşıt bir tanıma çevirebileceğimizi belirtmiştik. Çarpım için de bu mümkün:

**Tanım 3.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$  nesnelere verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan  $B \in \mathcal{C}$  nesnesine  $B_1$  ile  $B_2$ 'nin *eşçarpımı* denir:

$\iota_1 : B_1 \rightarrow B$  ve  $\iota_2 : B_2 \rightarrow B$  morfizmaları vardır ve verilen her  $f : B_1 \rightarrow X$  ve  $g : B_2 \rightarrow X$  morfizmaları için biricik  $b : B \rightarrow X$  morfizması vardır ve

$$b \circ \iota_1 = f \text{ ve } b \circ \iota_2 = g$$

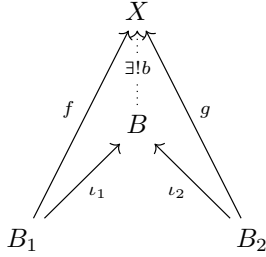
eşitlikleri sağlanır.

Dikkat ederseniz, iki nesnenin çarpımı bu nesnelere ayrı ayrı morfizma yazabildiğimiz evrensel nesneyken, eşçarpım bu iki nesneden morfizma kabul eden evrensel nesnedir. Kümeler kategorisinde düşünersek, çarpımdan çarpanlara izdüşüm

fonksiyonları varken, eşçarpımın çarpanlarından eşçarpıma fonksiyonlar olmalı.

**Alıştırma 2.** Küme kategorisinde eşçarpımın ayrık birleşime denk olduğunu gösteriniz.

Eşçarpımın koşulunu da değişmeli diyagramla ifade etmek mümkün:



**🔔** Yukarıdaki gibi eşçarpımın gösteriminde de kümelerdeki denkliği kullanacağız.  $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$  nesnelere eşçarpımı varsa bu eşçarpımı  $B_1 \sqcup B_2$  ile göstereceğiz.

Şimdi çarpım işlemine farklı bir gözle bakalım.  $\mathcal{C}$  kategorisinden  $A_1$  ve  $A_2$  nesnelere verilmiş olsun ve bu nesnelere birer morfizma yazabileceğimiz nesnelere varsayalım, yani,

$$\{X \in \mathcal{C} \mid \exists X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2\}$$

kümesi boş olmasın.  $\mathcal{C}_{A_1, A_2}$  kategorisini aşağıdaki bilgiyle tanımlayalım:

1. Nesnelere,  $a_1 : X \rightarrow A_1$  ve  $a_2 : X \rightarrow A_2$   $\mathcal{C}$ 'de morfizmalar olmak üzere  $(X, a_1, a_2)$  üçlülere olsun,
2.  $(X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2)$  nesnelere arasındaki morfizmalara aşağıdaki koşulları sağlayan  $\alpha : X \rightarrow Y$  morfizmaları olsun:

$$b_1 \circ \alpha = a_1 \text{ ve } b_2 \circ \alpha = a_2$$

3. Bileşke işlemi  $\mathcal{C}$ 'deki bileşke işlemi ve kimlik morfizmaları da yine  $\mathcal{C}$ 'deki kimlik morfizmaları olsun.

Bu tanımın gerçekten bir kategori verdiğini kanıtlamamız gerekli, ama bu zor değil. Tek yapmamız gereken ikinci koşuldaki eşitliklerin sağlandığını göstermek.

**Alıştırma 3.**  $\mathcal{C}_{A_1, A_2}$ 'nin bir kategori olduğunu gösteriniz.

Tanımladığımız  $\mathcal{C}_{A_1, A_2}$  kategorisinin  $A_1$  ve  $A_2$ 'nin çarpımı olabilecek tüm nesnelere içerdiği

açık. Peki tüm bu olası nesnelere içinde, çarpımı belirleyen biricik koşul nedir?

Tabii ki evrensellik:  $\mathcal{C}_{A_1, A_2}$  kategorisindeki tüm nesnelere  $(A_1 \times A_2, p_1, p_2)$ 'ye biricik morfizma vardır! Yani,

**🔔**  $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$  nesnesi  $\mathcal{C}_{A_1, A_2}$ 'nin son nesnesidir.

Son nesnelere evrenselliğini kavraması daha kolay olduğundan bu gözlem evrensellik için iyi bir açıklamadır. Benzer bir gözlemi, dikkatli bir şekilde, eşçarpım için de yapabiliriz. Dikkatli olacağımız nokta, ikililikten dolayı, eşçarpım tanımlayacağımız kategorinin baş nesnesi olacaktır.

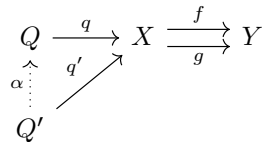
**Alıştırma 4.** Eşçarpımın baş nesne olduğu kategoriyi tanımlayınız.

Çarpım ve eşçarpım kadar temel olan, ama okuyucuların daha zor tanıyacağı bir örnek daha verelim.

**Tanım 4.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $f, g : X \rightarrow Y$  morfizmaları verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan  $q : Q \rightarrow X$  morfizmasına (ve  $(Q, q)$  ikilisine)  $f$  ve  $g$ 'nin eşitleyicisi denir:

- $f \circ q = g \circ q$  olmalı ve
- eğer  $q' : Q' \rightarrow X$  morfizması da  $f \circ q' = g \circ q'$  eşitliğini sağlıyorsa,  $q' = q \circ \alpha$  eşitliğini veren biricik  $\alpha : Q' \rightarrow Q$  morfizması vardır.

Yine diyagramlara başvuralım: Aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan biricik  $\alpha : Q' \rightarrow Q$  morfizması bulunur:



Yukarıda kümeler kategorisi için çok sayıda örnek yaptık. Okuyucu yeni tanımlanan kümeler kategorisine kolayca uygulayabilmeli.

**Alıştırma 5.** Küme kategorisinde  $f, g : X \rightarrow Y$  fonksiyonlarının eşitleyicisini bulunuz.

Biz biraz daha karmaşık bir örneğe göz atalım. Bu örnek gruplar teorisinin temel tanımlarını bilmeyi gerektiriyor, ama diğer taraftan neden temel bir yapıdan söz ettiğimizi de gösteriyor.

**Örnek 5.** Grp kategorisinde  $\phi : G \rightarrow H$  homomorfizmasını ve ayrıca  $G$ 'nin tüm elemanlarını  $H$ 'nin birim elemanına götüren  $1 : G \rightarrow H, g \mapsto 1_H$  homomorfizmasını alalım. Bu iki homomorfizmanın eşitleyicisini bulmak istiyoruz. Öncelikle,

$$K \xrightarrow{k} G \xrightarrow[1]{\phi} H$$

değişmeli diyagramını kurmamız gerekli, yani öyle bir  $K$  grubu ve  $k : K \rightarrow G$  homomorfizması bulacağız ki

$$\phi \circ k = 1 \circ k$$

olsun. Ama eşitliğin sağ tarafı  $1 : K \rightarrow H$  homomorfizmasına eşittir. O zaman  $k$ 'nin görüntüsü  $\phi$ 'nin  $1_H$ 'ye gönderdiği elemanlardan oluşmalı. Bu tür elemanların altgrubuna  $\phi$ 'nin çekirdeği denir. Evrensel bir nesne aradığımızdan,  $K = \text{Çek}(\phi)$  ve  $k = \iota : g \mapsto g$  alalım. Bu seçimle birlikte,

$$\text{Çek}(\phi) \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow[1]{\phi} H$$

diyagramı değişmeli olur. Ek olarak ikinci koşulu, yani evrenselliği, kontrol etmeliyiz. Öyleyse,

$$K' \xrightarrow{k'} G \xrightarrow[1]{\phi} H$$

değişmeli diyagramı verilmiş olsun. Yapmamız gereken aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak biricik  $\alpha : K' \rightarrow \text{Çek}(\phi)$  homomorfizması olduğunu göstermek:

$$\begin{array}{ccc} \text{Çek}(\phi) & \xrightarrow{\iota} & G \xrightarrow[1]{\phi} H \\ \alpha \uparrow \vdots & \nearrow k' & \\ K' & & \end{array}$$

Bu tanımlı yapmak zor değil; çünkü ilk diyagramın değişmeli olması  $\text{Gör}(k') \subseteq \text{Çek}(\phi)$  olduğu anlamına geliyor. Dolayısıyla tek yapmamız gereken  $\alpha = k'$  almak. Okuyucu  $\alpha$  için başka bir seçenek olmadığını göstermeli!

Bu örnekle birlikte aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk:

**Önerme 1.** Grp kategorisinde  $\phi, 1 : G \rightarrow H$  homomorfizmalarının eşitleyicisi  $\phi$ 'nin çekirdeğidir.

Çekirdeğin varlığı gruplar teorisi için önemlidir; çünkü hem bütün normal alt grupları belirler hem de izomorfizma teoremlerini kanıtlamamızı sağlar. Yukarıdaki sonuçla birlikte eşitleyicileri çekirdeklerin genellemesi olarak görebiliriz.

**Soru 1.**  $\mathcal{C}$  kategorisindeki  $f : A \rightarrow B$  morfizmasının çekirdeğini tanımlamak için nelere ihtiyaç vardır?

Bu soruyu cevaplamak için yukarıdaki kanıtı dikkatlice incelemek gerekli. Cevap çok zor değil!

Eşitleyiciyi tanımlayan,

$$Q \xrightarrow{a} X \xrightarrow[g]{f} Y$$

diyagramına bir *çatal* denir. Çarpımda olduğu gibi, tüm çataların kategorisini kurabiliriz. Bu durumda eşitleyiciyi, çatalar kategorisindeki son nesne ya da *evrensel çatal* olarak tanımlamak mümkün. Son nesnelerin biricikliği, eşitleyicilerin de biricik olduğunun kanıtını verir.

**Alıştırma 6.** Eşitleyicinin karşıtı olan denkleştirici<sup>a</sup> tanımını yapınız. Küme kategorisinde verilen iki fonksiyonun denkleştiricisini bulunuz.

<sup>a</sup>Önceki isimlendirmemizi takip etseydik denkleştirici yerine eş-eşitleyici dememiz gerekirdi, ama bu söylemesi güç bir kelime oluyor. Tercih ettiğimiz isim **Küme** kategorisi örneğinden sonra tatmin edici olacak.

Yukarıdaki iki örneğin (çarpım ve eşitleyici) bir ortak tarafı, her ikisinde de verilen bir diyagrama giden evrensel morfizmalar aranıyor olması. Şimdiki amacımız bu durumu olabildiğince soyutlamak ve herhangi bir diyagram için çalışır bir tanım vermek. Kategoriler teorisinin zor kurulumlarından biri olan limit kavramını basit bir formda ve kısaca tanımlayacağız. Öncü bir tanımla başlayalım.

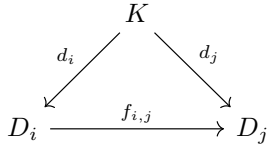
**Tanım 5.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathbb{D}$  bu kategoride bir diyagram olsun.  $\mathbb{D}$  üzerinde bir *koni*,  $K \in \mathcal{C}$  ve her  $D_i \in \mathbb{D}$  nesnesi için bir morfizma  $d_i : K \rightarrow D_i$  olmak üzere  $(K, (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ikilisinden oluşur. Bu ikili,  $\mathbb{D}$ 'deki her  $f_{i,j} : D_i \rightarrow D_j$  morfizması için,

$$f_{i,j} \circ d_i = d_j$$

eşitliğini sağlar.

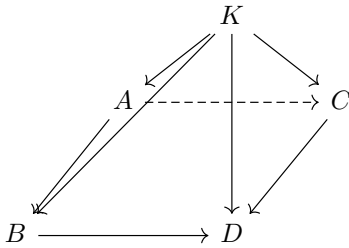
Tanımlı rasgele diyagramlar üzerinde görselleştirmek zor olsa da sadece bir morfizma için aşağı-

daki diyagramı göz önünde bulundurabiliriz:

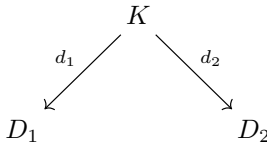


Sözlü olarak söylersek,  $\mathbb{D}$ 'nin bir konisi,  $\mathcal{C}$ 'den bir  $K$  nesnesi ve bu nesneden  $\mathbb{D}$ 'nin her köşesine giden bir morfizmadan oluşur. Ek olarak,  $\mathbb{D}$ 'deki her morfizmanın,  $K$ 'den köşelere gelen morfizmalarla oluşturduğu (yukarıda görülen) üçgenlerin her biri değişmeli olmalıdır. Bu ifadeyle birlikte “koni” terimi daha anlamlı olur;  $K$ 'yi köşe, diyagramı ise taban olarak düşündüğümüzde koni benzeri bir yapı ortaya çıkmaktadır.

**Örnek 6.** Aşağıdaki diyagram, kare diyagram üzerindeki bir koni örneğini gösteriyor.

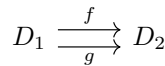


**Örnek 7.** Yazının girişinde verdiğimiz diyagram örneklerinden ilki, aralarında morfizma bulunmayan iki nesneden oluşuyordu. Bu diyagram üzerindeki bir koni,

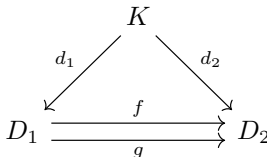


diyagramıdır. Bu diyagramın çarpım tanımında kullandığımız diyagram olduğu açıktır.

**Örnek 8.** Eşitleyici tanımında kullandığımız diyagram üzerindeki koniye de bakalım. Diyagramımız,



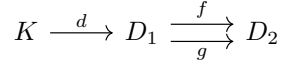
Yukarıdaki tanıma göre, bu diyagram üzerinde bir koni,  $K$  nesnesi ve  $d_1 : K \rightarrow D_1$  ve  $d_2 : K \rightarrow D_2$  morfizmalarından oluşacak:



Ek olarak diyagramın değişmeli olmasını, yani,

$$f \circ d_1 = d_2 \circ g$$

olmasını istiyoruz. Görüleceği gibi,  $d_1$  morfizmasını seçtiğimizde değişmeli olma koşulu  $d_2$ 'yi belirlemiş oldu. Dolayısıyla, aslında konimiz,



çatalına denktir.

Daha karmaşık örnekleri okuyucularımız kurabilir. Şimdilik yukarıdaki örneklerle devam edelim. Sıradaki adımımız tahmin edilebilir. Çarpımda ve eşitleyicide olduğu gibi koniler kategorisinin son nesnesini, yani evrensel konileri belirlemek istiyoruz.

**Tanım 6.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve bu kategoride  $\mathbb{D}$  diyagramı verilsin.  $\mathbb{D}$  diyagramının *limiti*  $\mathbb{D}$  diyagramı üzerindeki evrensel konidir ve

$$\lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D}$$

ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda evrenselliğin anlamı şudur:  $\lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D} = (L, \lambda = (\lambda_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ise ve eğer  $(K, d = (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ikilisi  $\mathbb{D}$  üzerinde bir koniye,  $\lambda \circ l = d$  eşitliğini sağlayan,

$$l : (K, (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}}) \longrightarrow \lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D}$$

biricik morfizması vardır.

**Örnek 9.**  $\mathbb{D} = (A_1 \ A_2)$  aralarında morfizma olmayan iki nesne olduğunda,

$$\lim_{\mathcal{C}} (A_1 \ A_2) \cong (A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$$

olacaktır.

**Örnek 10.** Bir  $\mathcal{C}$  kategorisinde  $\mathbb{D} = (f, g : B_1 \rightarrow B_2)$  olduğunda,

$$\lim_{\mathcal{C}} (f, g)$$

limiti  $f$  ve  $g$ 'nin  $\mathcal{C}$ 'deki eşitleyicisidir.

**Alıştırma 7.** Herhangi bir kategori  $\mathcal{C}$ 'de boş diyagramın limitinin son nesne olduğunu kanıtlayınız.

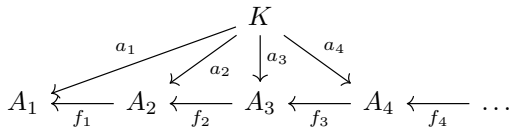
**Örnek 11.** Son bir limit örneği daha verelim. Daha kolay anlaşılması için  $\mathcal{C} = \mathbf{Küme}, \mathbf{Grp}$  ya da  $\mathbf{FVek}$  olsun. Diyagramımız,

$$\mathbb{A} = A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} A_3 \xleftarrow{f_3} A_4 \xleftarrow{f_4} \dots$$

olsun. Örneğin, kümeler kategorisinde  $f_i$  fonksiyonlarını içermeye olarak seçersek, diyagram  $A_2, A_1$ 'in altkümesi,  $A_3, A_2$ 'nin altkümesi vs anlamına gelir. Şimdi  $\mathbb{A}$  üzerindeki bir koni  $(K, (a_i)_{i \in \mathbb{N}})$  ikilisi olacak. Burada  $K \in \mathcal{C}$  ve her  $i \in \mathbb{N}$  için  $a_i : K \rightarrow A_i$ 'ler  $\mathcal{C}$ 'de morfizmalardır. Ayrıca her  $i \geq 2$  için,

$$f_{i-1} \circ a_i = a_{i-1}$$

eşitliği sağlanmalı, yani aşağıdaki üçgenler değişmeli olmalı:



Kategori seçimimizden dolayı tüm morfizmalar aynı zamanda fonksiyon olmalı. Öyleyse her  $x \in K$  elemanını,  $x_i = a_i(x)$  olmak üzere  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dizisiyle eşleyebiliriz. Bu eşleme birebir olmak zorunda değil. İddiamız limit koniyi elde etmek için birebirlik özelliğinin yeterli olduğudur, yani,

$$\lim_{\leftarrow} \mathbb{A} = (\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in A_i \text{ ve } a_i(x_i) = x_{i-1}\}, (p_i)_i)$$

eşitliği sağlanır. Burada  $p_i$   $i$ 'inci koordinata olan izdüşüm fonksiyonunu göstermektedir. Bir diğer ifadeyle, limit nesnemiz, tüm  $A_i$ 'lerin kartezyen çarpımının yukarıdaki ek koşulu sağlayan elemanlarından oluşan altkümedir. Tanımladığımız kümenin  $\mathbb{A}$  üzerinde bir koni olduğu açıktır. Bu koninin aynı zamanda evrensel koni olduğunu kanıtlamayı, kanıtın zor olmadığını belirterek, ilgili okuyucuya bırakıyoruz.

**Alıştırma 8.**  $\lim_{\leftarrow} \mathbb{A}$ 'nın gerçekten  $\mathbb{A}$ 'nın limiti olduğunu gösteriniz.

Bu örnekte kurduğumuz limit aslen iyi bilinir ve ters limit olarak adlandırılır. İyi bilinen gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{\leftarrow} A_i$$

**Alıştırma 9.** Küme kategorisinde  $f_i$  fonksiyonlarının içermeye fonksiyonları olduğu durumda limiti hesaplayınız.

**Alıştırma 10.** Grp kategorisinde,  $p$  bir asal sayı olmak üzere,  $A_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  ve  $f_i : \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  fonksiyonu mod  $p$ 'de hesaplama olduğunda limiti hesaplayınız.

Şimdi sıra geldi ikililik prensibini kullanıp eş-limit tanımlamaya! Okuyucu ne yapacağımızı kestirebiliyor olmalı: Tüm okları ters çevireceğiz! Yukarıda ipucu olarak çarpımı tersine çevirmiştik. Şimdi aynı işlemi tüm diğer tanımlara uygulayalım.

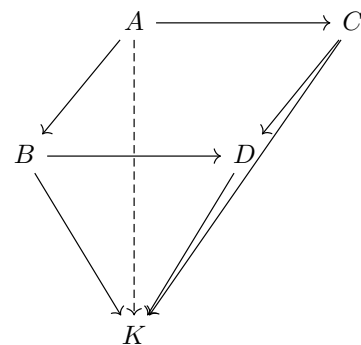
**Tanım 7.**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathbb{D}$  bu kategoride bir diyagram olsun.  $\mathbb{D}$  altında bir kühah<sup>a</sup>,  $K \in \mathcal{C}$  ve her  $D_i \in \mathbb{D}$  nesnesi için bir morfizma  $d_i : D_i \rightarrow K$  olmak üzere  $(K, (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ikilisinden oluşur. Bu ikili,  $\mathbb{D}$ 'deki her  $f_{i,j} : D_i \rightarrow D_j$  morfizması için,

$$d_j \circ f_{i,j} = d_i$$

eşitliğini sağlar.

<sup>a</sup>İngilizcede oklar ters çevrildiğinde elde edilen tanımlar için "co-" öneki kullanılır. Türkçedeyse bu ek genelde "eş-" önekiyle karşılanıyor. "Koni" kelimesi için "eşkoni" demek gerekirdi; ama bunun yerine kühah demeyi tercih ettik.

Yukarıdaki örneklerde okları çevirme görevini okuyucuya bırakalım. Kullandığımız terimi anlaşılır kılmak üzere kare diyagram altındaki kühahı paylaşıyoruz:



Kühahların evrensel olanlarını isimlendirelim:

**Tanım 8.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve bu kategoride  $\mathbb{D}$  diyagramı verilsin.  $\mathbb{D}$  diyagramının eş-limiti  $\mathbb{D}$  diyagramı altındaki evrensel külahtır ve

$$\text{eslim}_{\mathcal{C}} \mathbb{D}$$

ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda evrenselliğin anlamı şudur:  $\text{eslim}_{\mathcal{C}} \mathbb{D} = (L, \lambda = (\lambda_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ise ve eğer  $(K, d = (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$  ikilisi altındaki bir külahsa,  $l \circ \lambda = d$  eşitliğini sağlayan,

$$l : \text{eslim}_{\mathcal{C}} \mathbb{D} \longrightarrow (K, (d_i)_{D_i \in \mathbb{D}})$$

biricik morfizması vardır.

Limit örneklerinde okları ters çevirip eşlimit hesabı yapmayı okurlarımıza bırakalım. Ortaya çıkacak kavramları tanımaya çalışmak da alıştırmamızın bir parçası!

Sık kullanılan bir eşlimiti aşağıda hesaplayacağız. Bu kez okları ters çevirip limiti hesaplama alıştırmaya olacağız.

**Örnek 12.** Eş-limitini hesaplayacağımız diyagram  $\mathbb{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,2}} & D_2 \\ \downarrow f_{1,3} & & \\ D_3 & & \end{array}$$

İlk olarak bu diyagramın altındaki külahları belirleyelim. Tanımı takip edersek elde edeceğimiz diyagram aşağıda:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,2}} & D_2 \\ \downarrow f_{1,3} & \searrow d_1 & \downarrow d_2 \\ D_3 & & K \\ & \searrow d_3 & \end{array}$$

Oluşan üçgenlerin değişmeli olması koşulundan dolayı,

$$d_2 \circ f_{1,2} = d_1 \circ f_{1,3}$$

eşitlikleri sağlanır, yani  $d_1$  morfizması  $d_2$  ve  $d_3$  tarafından belirlenir. Bu morfizmayı silip kalanları biraz kısaltırsak,

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,2}} & D_2 \\ \downarrow f_{1,3} & & \downarrow d_2 \\ D_3 & \xrightarrow{d_3} & K \end{array}$$

değişmeli diyagramını elde ederiz. Şimdi,

$$\text{eslim}_{\mathcal{C}} \mathbb{D} = (E, (e_2, e_3))$$

olsun. Evrensellik koşulunu aşağıdaki diyagramda görelim:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,2}} & D_2 \\ \downarrow f_{1,3} & & \downarrow e_2 \\ D_3 & \xrightarrow{e_3} & E \\ & \searrow d_3 & \swarrow d_2 \\ & & K \end{array}$$

Yukarıda tarif ettiğimiz evrensel külah,  $\mathbb{D}$ 'nin *ileri limiti*<sup>2</sup> ya da *fiberli toplama* olarak adlandırılır.

**Alıştırma 11.** Küme kategorisinde fiberli toplama belirleyiniz. İlk adım olarak az elemanlı kümeler seçip hesap yapmanız faydalı olacaktır.

Limitlerle ilgili bazı ek sonuçları *Limit ve Eş-limit II* yazımızda kanıtlayacağız. Bu kısa girişin ardından izleçlere öncelik vermemiz yerinde olur.

<sup>2</sup>İng. pushout.

## Kategoriler Teorisi

## İzleçler ve Kategoriler Kategorisi ☺☺

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Kategoriler teorisinin nesnelere yerine nesnelere arasındaki ilişkilere önem verdiğini belirtmiştik. Bu bakış açısıyla kategoriler arasındaki ilişkileri incelememiz kaçınılmazdır! Aslında temel amaçlarımızdan birisi farklı matematiksel nesne toplulukları arasındaki ilişkileri incelemektir, dolayısıyla kategorilerin nesnelere olduğu topluluğa göz atmamız çok doğal! Tabii bu fikri kabul ettiğimizde, kategoriler arasındaki ilişkiler arasındaki ilişkileri de sorgulamalıyız! Sonrasındaysa durmak için tek gerekçemiz sayfa sınırlaması olacak.

İzleçleri kategorilere atıfta bulunmadan da düşünebiliriz. Kategoriler teorisi uzmanlarından John Baez, yeterince iyi olan her benzetmenin bir izleç olmayı arzulayacağını söyler.<sup>1</sup>

Kategoriler cebirsel yapılar olduğundan, aralarındaki “morfizmalar” “yapı koruyan fonksiyonlar” gibi olmalı. Dolayısıyla, önce nesnelere arasında bir ilişki kurmalı, bunu morfizmalara, nesnelere kimliklerini koruyacak şekilde genişletmeli ve bileşkeyi korumasını sağlamalıyız:

**Tanım 1.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri arasında bir izleç  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,

1. bir  $F_1 : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  fonksiyonu ve
2. bir  $F_2 : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$  fonksiyonundan

oluşan  $F = (F_1, F_2)$  ikilisidir. Bu ikilinin

- $F_2(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$ ,
- her nesne  $X \in \mathcal{C}$  için,  $F_2(\text{id}_X) = \text{id}_{F_1(X)}$ ,
- her  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  morfizmaları için,

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

koşullarını sağlaması beklenir.

Yukarıdaki tanımda her ne kadar  $F_1$  ve  $F_2$  fonksiyonları ayrı birer fonksiyon olsa da yazım kolaylığı

<sup>1</sup>Açıklama gerekli olmasa da bu söz, iyi bir benzetmemiz olduğunda bu benzetmeyi izleç olarak görebileceğimiz kategoriler aradığımızı dikkat çekiyor.

için her ikisini de  $F$  ile göstereceğiz. Bu tanımla birlikte izleçlerin yapı koruyan fonksiyon ikilileri olduğu kolaylıkla görülmektedir.

**Örnek 1.** En kolay izleç örnekleri *unutkan izleç* olarak adlandırdığımız ve verilen yapının bazı parçalarını unutan izleçlerdir. Örneğin,

$$\mathcal{F} : \text{Grp} \rightarrow \text{Küme}$$

izlecini her grup  $G$ 'yi küme olan  $G$ 'ye götüren, yani grup işlemini unutan ve her grup homomorfizması  $\phi : G \rightarrow H$ 'yi kendisine götüren, yani  $\phi$ 'nin grup işlemini koruduğunu unutan izleç olarak tanımlarız. Bu örnekleri kolaylıkla çoğaltabiliriz: Halkalardan Abel gruplarına, halkalardan tekçelere, vektör uzaylarından Abel gruplarına vs çok sayıda unutkan izleç bulunmaktadır. Her ne kadar anlamsız görünse de unutkan izleçler kritik noktalarda sıklıkla kullanılan önemli araçlardır.

**Örnek 2.** Daha elle tutulur bir örnek için tekrar kümeler kategorisine dönelim.  $A$  kümesinin *kuvvet kümesi*  $\mathcal{P}(A)$ ,  $A$ 'nın tüm alt kümelerinin kümesi olarak tanımlanır, yani  $A$ 'nın kuvvet kümesi,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

kümesidir. Şimdi her  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu verildiğinde

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$$

fonksiyonunu  $X \subseteq A$ 'daki değeri,

$$\mathcal{P}(f)(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

kümesi olan fonksiyon olarak tanımlarız. Tanım gereği  $\mathcal{P}(f)(X) \subseteq B$ 'dir. Ayrıca, eğer  $f = \text{id}_A : A \rightarrow A$  kimlik fonksiyonuysa,  $\mathcal{P}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$  olacağı açıktır. Son olarak, eğer  $g : B \rightarrow C$  fonksiyonu verilirse,

$$\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g \circ f)$$

eşitliği de sağlanacaktır. Dolayısıyla,

$$\mathcal{P} : \text{Küme} \rightarrow \text{Küme}$$

izlecini elde etmiş oluruz.

Yukarıdaki örnek her ne kadar aşikâr olmayan bir örneğe de kategorileri karşılaştırma amacımıza hizmet etmiyor. Bu amaç için iki farklı kategori arasında bir izleç kuralım.

**Örnek 3.**  $G$  bir sonlu grup olsun. Bu grubu tek nesneli,  $*$  diyelim, morfizmaları  $G$  grubu olan  $\mathfrak{G}$  kategorisi olarak görebileceğimizi belirtmiştik. Şimdi,

$$F : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

izlecini gruplar için ne anlama geldiğini bulalım. Öncelikle,  $F(*) \in \mathbf{Küme}$  bir küme olmalı, yani ilk olarak bir küme seçiyoruz. İkinci adımımız,  $\mathfrak{G}$ 'deki her morfizma için, yani her  $g \in G$  için,

$$F(g) : F(*) \rightarrow F(*)$$

fonksiyonunu seçmek olmalı. Bu fonksiyon kimlik morfizmasını, yani  $g = 1$ 'i, kimlik morfizmasına götürmeli, yani

$$F(1) = \text{id}_{F(*)}$$

sağlanmalı. Ayrıca bileşke korunmalı, yani her  $g, h \in G$  için,

$$F(g \cdot h) = F(g) \circ F(h)$$

olmalı. Bu eşitlik ayrıca  $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$  olmasını gerektirdiğinden her  $g \in G$  için  $F(g)$  tersinirdir.

Tüm bu sonuçları bir araya getirirsek,  $F$ 'nin aslında bir  $G$ -küme belirlemeye denk olduğunu görürüz!<sup>a</sup> Aslında,  $\mathfrak{G}$ 'den  $\mathbf{Küme}$  kategorisine izleçlerle  $G$ -kümeler arasında birebir eşleme vardır. Dolayısıyla tüm  $G$ -küme teorisini izleçler cinsinden ifade etmek mümkün olmalı.

<sup>a</sup>Hatırlamayanlar için,  $X$  kümesinin bir  $G$ -küme olması,  $1 \cdot x = x$  ve  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$  eşitliklerini sağlayan bir  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  fonksiyonunun var olması demektir.

**Örnek 4.** Yukarıdaki örneği genelleştirmek mümkündür.  $\mathbf{Küme}$  kategorisi yerine herhangi bir kategori koyarsak  $G$ 'nin bu nesnelere üzerindeki temsillerini elde ederiz. Örneğin,

$$F : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{FVek}$$

izleçleri  $G$ 'nin  $F$ -temsillerine karşılık gelir.

**Örnek 5.**  $G$  ve  $H$  iki grup olsun. Karşılık gelen bir nesneli kategorileri  $\mathfrak{G}$  ve  $\mathfrak{H}$  ile gösterelim. Eğer  $\phi : G \rightarrow H$  bir grup homomorfizmasıysa,

$$\Phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$$

<sup>2</sup>Kısaca, temel grup  $x$ 'teki döngülerin homotopi sınıflarının grubudur. Detaylar için temel topoloji kitapları incelenebilir.

<sup>3</sup> $f^*$ 'ın grup işlemini koruduğunu ayrıca kanıtlamak gereklidir.

izlecini  $*$   $\in \mathfrak{G}$  biricik nesnesini  $*$   $\in \mathfrak{H}$  biricik nesnesine,  $g : * \rightarrow *$  morfizmasıysa  $\phi(g) : * \rightarrow *$  morfizmasına götüren izleç olarak tanımlayalım. Bu tanımın gerçekten bir izleç verdiği kolayca gösterilebilir.

Şimdi,  $F : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$  bir izleç olsun.  $F$  biricik nesnelere birbirine götürmeli. Ayrıca,  $F$ , morfizma kümeleri arasında da bir fonksiyon üretecek:

$$F : G \rightarrow H.$$

İddiamız bu fonksiyonun bir grup homomorfizması olduğu. Gerçekten de izleç tanımından dolayı birim eleman birim elemana gider. Ayrıca bileşke işlemi grup çarpması olduğundan, bileşkeyi korumanın anlamı grup işlemini korumaktır.

Dolayısıyla grup homomorfizmalarıyla karşılık gelen grup kategorileri arasındaki izleçler arasında birebir eşleme vardır.

**Örnek 6.** Bir önceki yazımızda diyagramları tanımlamıştık. Aslında diyagramları da izleç olarak görmek mümkün.  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathcal{I}$  bir küçük kategori olsun. Bu seçimlerle, her bir,

$$\mathbb{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$$

izlecine  $\mathcal{C}$ 'de  $\mathcal{I}$  şeklinde bir diyagram denir. Bir önceki yazımızdaki diyagramları  $\mathcal{I}$  kategorisinin değişik seçimleriyle elde edebileceğimiz açıktır.


**Örnek 7.** Son bir örnek daha verelim. Bu kez topolojik uzaylar kategorisinden çıkan bir izleç tanımlayacağız, topoloji bilmeyen okurlarımız bu örneği atlayabilir.

$\mathbf{Top}_*$  ile noktalı topolojik uzayların kategorisini gösterelim. Nesnelere bir noktası sabitlenmiş topolojik uzaylar  $(X, x)$  ve morfizmalar ise sabitlenmiş noktaları birbirine götüren sürekli fonksiyonlar olacak.

Şimdi  $(X, x) \in \mathbf{Top}_*$  olsun. Bu uzayın temel grubunu  $\pi_1(X, x)$  ile gösterelim.<sup>2</sup> Sürekli fonksiyonlar homotopi sınıflarını koruduğundan,  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  sürekli fonksiyonu  $f^* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  grup homomorfizmasını üretir.<sup>3</sup> Dolayısıyla

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

izlecini elde etmiş olduk.

 Yedi örnekte, yapı unutan izleçten kuvvet kümesi alana, grup etkilerini tanıyan izleçlerden diyagramlara, temel grup üreten izleçten grup homomorfizmalarına kadar birbirinden bağımsız görünen

kavramları örgütleyen ortak bir çatı kurduk. Örnekler her alandan gelecek şekilde çoğaltılabilir. Sadece bu başarıyı göstermek bile takdire şayandır! Bir de izleçlerle ilgili sonuçlar elde edip tüm bu örneklerle uygulayabildiğinizi düşünün! Ne âlâ! Ama zor!

### İzleç türleri

Yaygın kullanılan ve pratik izleç örnekleri de vereceğiz, ama önce izleçler hakkında temel birkaç soruyu cevaplayalım. İlk olarak izleç türlerini düşünelim. Bir izlecin birebir olması ya da örten olması gibi özelliklerden bahsetmek istiyoruz. Her izleç, biri nesnelere biri morfizmalar üzerinde olmak üzere iki fonksiyondan oluştuğundan bu kavramları hangi fonksiyon için kullanmak istediğimize karar vermeliyiz. Kategorilerde nesnelere değil morfizmalar önemli olduğundan ilimizi ilk olarak ikinci fonksiyona odaklayalım.

**Tanım 2.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri ve  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleci verilsin.

1. Eğer her  $A, B \in \mathcal{C}$  için,

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

fonksiyonu örtense  $F$  izlecine *dolu* denir.

2. Eğer her  $A, B \in \mathcal{C}$  için,

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

fonksiyonu birebirse  $F$  izlecine *sadık* denir.

Bu tanımda, dolu olmanın örten, sadık olmanın birebir anlamına gelmediğine dikkat edelim.

- Dolu izleç morfizmalar üzerinde örten olmak zorunda değildir; çünkü nesnelere üzerindeki fonksiyonun görüntüsünde olmayan nesnelere arasındaki morfizmalar açıkta kalır. Yani, dolu izleçler sadece görüntülerindeki nesnelere arasındaki morfizmalar için örtendir.
- Sadık izleçler birebir olmak zorunda değildir; çünkü  $A \neq A'$  olsa bile  $F(A) = F(A')$  olabilir ve bu durumda  $F$  sadık olsa bile  $f : A \rightarrow B$  ile  $g : A' \rightarrow B$ 'nin görüntüleri aynı olabilir. Yani, sadık izleçler sadece tanım ve hedef nesnelere sabitlendiğinde birebirdir.

**Örnek 8.** Yukarıdaki örneklerimizden bazılarını göz atalım.

- Unutkan izleçler dolu değildir; çünkü yapının bir kısmını unuttuğumuzda yeni yapılar ara-

sında daha çok morfizma ortaya çıkar. Örneğin gruplardan kümeler gittiğimizde, sadece grup homomorfizmalarını değil tüm fonksiyonları düşünmemiz gerekir. Diğer taraftan bu izleçler sadıktır; çünkü temelde sadece yapı unutulur, elemanlara uygulanan kural değişmez.

- Kuvvet kümesi izleci de dolu olmayan sadık bir izleçtir. (Alıştırma!)
- Grup etkileri için, halihazırda sadık grup etkisi kavramı mevcuttur ve bu iki kavram, yani sadık grup etkisi ve sadık izleç, birbirleriyle örtüşür. Diğer taraftan dolu izlece karşılık gelen grup etkileri ilginç değildir. Okuyucu örnek bulmayı deneyebilir.
- Dolu izleç örneği için grup homomorfizmalarını düşünebiliriz. Yukarıda belirttiğimiz gibi,  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$  izleçleri ile  $G \rightarrow H$  grup homomorfizmaları eşleşir. Dahası, bu eşleme dolu izleçleri örten homomorfizmalarla, sadık izleçleriyse birebir homomorfizmalarla eşlemektedir.

Her ne kadar morfizmalara önem versek de nesnelere arasındaki fonksiyon üzerine de anlamlı koşullar koyabiliriz.

**Tanım 3.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri ve  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleci verilsin. Eğer her  $D \in \mathcal{D}$  için  $D \cong F(A)$  olacak bir  $A \in \mathcal{C}$  bulabiliyorsak  $F$  izlecine *özünde örten* ya da *yoğun* denir.

Bir diğer ifadeyle, verilen bir izleç nesnelere üzerinde örten olmasa da eğer bu izlecin görüntüsü, verilen her nesneyle eş-yapılı en az bir nesne içeriyorsa bu izlece özünde örten diyeceğiz. İlerleyen sayfalarda özünde örten olmanın önemini göreceğiz.

**Örnek 9.** Daha önce bir kategorinin iskeletinden bahsetmiştik.  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  ise bu kategorinin bir iskeleti olsun. Bu seçimle, içermeye izleci,

$$\iota : \mathcal{S}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

özünde örten olur.

Bu noktada yeni bir kavram ortaya atacağız. Yukarıda tanımladığımız izleçler morfizmaların yünü korur, yani,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleci  $f : A \rightarrow B$  morfizmasını  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  morfizmasına götürüyor. Ancak bazı doğal tanımlarda bunun aksine davranan gönderimler de var. Bunları da teoriye eklemek üzere aşağıdaki tanımı yapalım.

**Tanım 4.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri arasında bir aksi izleç<sup>a</sup>  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,

1. bir  $F_1 : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  fonksiyonu ve
2. bir  $F_2 : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$  fonksiyonundan oluşan

$F = (F_1, F_2)$  ikilidir. Bu ikilinin

- $F_2(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F_1(B), F_1(A))$ ,
- Her nesne  $X \in \mathcal{C}$  için,  $F_2(\text{id}_X) = \text{id}_{F_1(X)}$ ,
- Her  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  morfizmaları için,

$$F_2(g \circ f) = F_2(f) \circ F_2(g)$$

koşullarını sağlaması beklenir.

<sup>a</sup>Eilenberg-MacLane'in ilk izleç örneği morfizmaların yönünü değiştirmektedir. Bu yüzden "contravariant" olarak adlandırdıklarını belirtirler. Sonrasında yön değiştirmeyen izleçler için "covariant" önekini kullanırlar. Ama aslında izleç denilince "covariant" izleç anlaşılması gerektiği açıktır. Bu sebepten biz sadece yön değiştirme durumu için bir terim ürettik.

İzleç tanımıyla karşılaştırdığımızda gerçekten de morfizmaların aksi yöndeki morfizmalara gittiğini görüyoruz. Bileşkeyi koruma kuralını da değiştirdiğimizi gözden kaçırmayın!

Dikkatli okuyucumuz aksi izleçlerle karşıt kategoriler arasındaki ilişkiyi fark etmiş olmalı:

**Önerme 1.**  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  aksi izleçleri ile  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$  izleçleri birebir eşleşir.

Burada kanıtlayacak bir şey yok, aksi izleçlere düşen morfizmaları ters çevirme görevini karşıt kategori alma işlemine yaptırdık.

**Örnek 10.**  $\mathbb{F}$  bir cisim olsun.  $\mathbf{FVek}$  ile sonlu boyutlu  $\mathbb{F}$ -vektör uzaylarının kategorisini gösteriyoruz.  $V \in \mathbf{FVek}$  için  $V$ 'nin eş-uzayı  $V^*$ ,  $V$ 'den çıkan tüm doğrusal fonksiyonların<sup>a</sup> uzayıdır. Verilen  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü eş-uzaylar arasında, ama aksi yönde bir doğrusal dönüşüm verir. Gerçekten, eğer  $f : W \rightarrow \mathbb{F}$  bir doğrusal fonksiyonelse,  $f \circ T : V \rightarrow \mathbb{F}$  olur. Dolayısıyla,

$$\text{Hom}_{\mathbf{FVek}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{FVek}}(W^*, V^*)$$

funksiyonunu elde ederiz. Öyleyse,

$$-^* : \mathbf{FVek} \rightarrow \mathbf{FVek}, V \mapsto V^*$$

izleci morfizmaların yönünü değiştiren bir aksi izleçtir.

<sup>a</sup>Hatırlatma: Bir doğrusal fonksiyonel  $f$ ,  $V$ 'den  $F$ 'ye tanımlı doğrusal dönüşüm demektir.

İzleçlerle olan yakın ilişkisinden dolayı aksi izleçleri ayrıca incelemeye gerek duymuyoruz. İlerleyen sayfalarda kritik noktalarda karşımıza çıkma potansiyelleri olduğunu belirtip izleç örneklerimize devam edelim.

## Hom-izleçleri

Rasgele iki kategori verildiğinde, bu kategoriler arasında bir izleç bulmak kolay değildir. Aslında benzer bir sorun daha temel yapılarda da bulunuyor; rasgele iki grup arasında anlamlı bir grup homomorfizması yazmak da aşikâr bir iş değildir. Bu engeli aşmanın birkaç standart yolu bulunuyor. İlk yol **Küme** kategorisine giden hom-izleçleridir.

$\mathcal{C}$  kategorisi ve  $A \in \mathcal{C}$  nesnesi verilsin.  $A$ 'daki hom-izlecini şöyle tanımlarız:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

verilen  $B \in \mathcal{C}$  nesnesini  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  kümesine götürür. Eğer  $f : B \rightarrow C$   $\mathcal{C}$ 'de bir morfizmaysa,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

fonksiyonu  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  morfizmasını  $f \circ g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  morfizmasına götürür. Yani  $f^* := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f)$  fonksiyonu  $f$  ile bileşke alma fonksiyonudur.

Her ne kadar basit bir tanım gibi görünse de hom-izleçleri kategorilerin en temel nesnelere birisidir. En ünlü kategoriler teorisi sonucu olan Yoneda Önsavı (bir sonraki yazımızda!) bunun kanıtlarından birisidir.

Dikkatli okuyucular verilen  $A$  nesnesini birinci değil de ikinci koordinata koymamız durumunda bir aksi izleç elde edeceğimizi fark etmiştir. Aksi hom-izleçleri de hom-izleçleri kadar kullanışlı araçlardır.

Kategoriler teorisi anlatmanın/yazmanın en zor yanlarından biri ilginç örnekler vermek için gerekli altyapının fazlalığı. Hom-izleçlerinin özellikleri ve uygulamaları da bu sınıfa giriyor. Yine de bir önceki yazımızı okuyanlar için limit/eş-limit koruma üzerine bir sonuç kanıtlamaya çalışalım. Analitik limitleri hatırlarsanız, sürekli fonksiyonların dizilerin limitini koruduğunu biliriz. Bu yönde bir sonuç vereceğiz.

**Teorem 1.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $A \in \mathcal{C}$  nesnesi ve  $\mathbb{D} \subseteq \mathcal{C}$  diyagramı verilsin. Hom izleci  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ ,  $\mathbb{D}$ 'nin limitini  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{D})$ 'nin limitine götürür, yani

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D}) = \lim_{\mathbf{Küme}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{D})$$

sağlanır.

Bir izleci diyagramda nasıl hesaplayacağımızdan bahsetmedik; ama okuyucu bunu rahatlıkla görebilir. Diyagramlar nesnelere ve bu nesnelere arasındaki morfizmalardan oluşur. Verilen izleci bunların her birine ayrı ayrı uyguluyoruz. Kanıtı vermeden önce limitin her zaman korunmadığını gösteren bir örnek verelim.

**Örnek 11.**  $\mathcal{F} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Küme}$  unutkan izleci tüm limitleri korumaz; çünkü  $\mathbf{Grp}$  kategorisinde baş nesne bir elemanlı grup 1 iken,  $\mathcal{F}(1) \in \mathbf{Küme}$  baş küme değildir! Cebirsel yapılar arasındaki unutkan izleçler genel olarak limitleri korumaz.

Şimdi teoremin kanıtını verebiliriz.

*Kanıt.* Notasyonu basitleştirmek üzere,

$$\mathbb{D}^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{D})$$

yazalım.  $\mathbb{D}$ 'nin  $\mathcal{C}$ 'deki limiti  $\lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D}$ 'yi  $(L, (l_i)_i)$  ile gösterelim. Burada  $l_i : L \rightarrow D_i$  morfizmaları  $l_j = f_{i,j} \circ l_i$  eşitliğini sağlayan biricik morfizmalardır. Yukarıdaki gibi,  $L^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L)$  yazalım.

Amaçımız  $(L^*, (l_i^*)_i)$  ikilisinin  $\mathbb{D}^*$ 'in  $\mathbf{Küme}$ 'deki limiti olduğunu göstermek. Bu amaçla  $\mathbb{D}^*$  üzerinde  $\mathbf{Küme}$ 'de bir koni  $(K, (d_i)_i)$  alalım. Burada,

$$d_i : K \rightarrow D_i^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D_i)$$

morfizmalarının  $f_{i,j}^* \circ d_i = d_j$  eşitliklerini sağladığını varsayıyoruz. Bu gösterimle birlikte, yapmamız gereken,

$$d_i = l_i^* \circ a$$

koşulunu sağlayan biricik,

$$a : (K, (d_i)_i) \rightarrow (L^*, (l_i^*)_i)$$

fonksiyonunu belirlemek.

Sabit bir  $k \in K$  için  $d_i(k) : A \rightarrow D_i$  morfizmalarını düşünelim.  $K$  bir koni olduğundan bu morfizmalar,

$$f_{i,j}^* \circ d_i(k) = (f_{i,j}^*(d_i(k)))(k) = d_j(k)$$

eşitliklerini sağlar. Dolayısıyla her  $k \in K$  için  $(A, (d_i(k))_i)$  ikilisi  $\mathcal{C}$ 'de  $\mathbb{D}$  üzerindeki bir konidir. Öyleyse,

$$d_i(k) = l_i \circ \alpha_k$$

eşitliğini sağlayan biricik  $\alpha_k : A \rightarrow L$  morfizmaları bulabiliriz.

Şimdi  $a : K \rightarrow L^*$  fonksiyonunu  $a(k) = \alpha_k$  olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun,

$$l_i^* \circ a = d_i$$

eşitliğini sağladığı ve dolayısıyla aradığımız fonksiyon olduğu açıktır. Bu koşulu sağlayan başka bir fonksiyon olmadığının kanıtını, zor olmadığı notuyla, okuyucuya bırakalım.  $\square$

Yukarıdaki teoremin karşıt kategorideki anlamını düşünersek, diğer hom-izleci  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ 'nin eş-limitleri koruyacağını görebiliriz. İkilik prensibiyle kanıtladığımız bu sonucu ayrı bir teorem olarak yazalım.

**Teorem 2.**  $\mathcal{C}$  kategorisi,  $A \in \mathcal{C}$  nesnesi ve  $\mathbb{D}$  diyagramı verilsin. Aksi hom-izleci  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ ,  $\mathbb{D}$ 'nin eş-limitini  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{D}, A)$ 'nin eş-limitine götürür, yani

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim_{\mathcal{C}} \mathbb{D}, A) = \lim_{\mathbf{Küme}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{D}, A)$$

sağlanır.

Bu yazılarda yer vermeyecek olsak da morfizma kümeleri üzerinde ek yapılar olan kategoriler de vardır. En temel örnek  $\mathbf{FVek}$  kategorisidir, morfizmalar, yani doğrusal dönüşümler, Abel grubu yapısına da sahiptir. Böyle durumlarda hom-izleçleri de ilgili kategorilerde değer alır.

### Çarpım izleçleri

Yaygın kullanılan bir diğer izleç türü hom-izleçlerine benzer bir kurulumla sahip. Bu kez sonlu çarpımların hepsine sahip bir  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $B \in \mathcal{C}$  nesnesi seçelim. Çarpım izleci,

$$- \times B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C},$$

nesnelere üzerinde  $A \mapsto A \times B$ , morfizmalar üzerindeyse,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{- \times B} & A \times B \\ f \downarrow & \longrightarrow & \downarrow f \times \text{id}_B \\ A' & \xrightarrow{- \times B} & A' \times B \end{array}$$

ile tanımlanır. Bu örnekte daha önce kullanmadığımız bir gösterim kullandık. Dikkat edilirse bu gösterimle izlecin hem nesnelere hem de morfizmalardaki kuralını bir kerede vermiş oluyoruz. Sıklıkla kullanılan bu gösterim özellikle sıradaki yazımızda kullanışlı olacak.

## Modül Kategorileri için Tensör ve Hom-izleçleri

Özellikle cebirsel hesaplarda sıklıkla kullanılan bir diğer izleç tensör çarpımlarıyla veriliyor. Bu örnek için modüller teorisi bilgisi gerekli. Bu konuyu bilmeyen okurlarımız bir sonraki bölüme geçebilir.

$R$  bir halka olsun.  $\mathbf{Rmod}$  ile sonlu üretilmiş  $R$ -modüllerinin ve  $R$ -modül homomorfizmalarının kategorisini gösterelim. Başka bir halka  $S$  verildiğinde bir  $(S, R)$ -bimodülü soldan  $S$ -etkisi ve bu etkiyle değişmeli sağdan  $R$ -etkisi altındaki bir Abel grubudur. Bimodülleri modül kategorileri arasında izleçler tanımlamak için kullanabiliriz.

Kısa bir hatırlatma yapalım: Eğer  $M$  bir  $(S, R)$ -bimodül ve  $N$  bir  $R$ -modülse tensör çarpımı  $M \otimes_R N$  şöyle tanımlanır:

$$M \otimes_R N = M \times N / (mr, n) \sim (m, rn)$$

Buradaki oran,  $M \times N$ 'nin paydada verilen  $R$ -etkisi altındaki yörüngelerini belirtiyor. Bu yörüngeler üzerindeki  $S$ -etkisi,  $S$ 'nin  $M$  üzerindeki sol etkisinden türetilmiştir. Tensör çarpımının özellikleri yazımızın amacı dışında. İlgili okuyucuyu klasik modüller teorisi kitaplarına yönlendiriyoruz.

$M$  bir  $(S, R)$ -bimodülü olsun.  $M$ 'yi kullanarak aşağıdaki izleci üretebiliriz.

$$M \otimes_R - : \mathbf{Rmod} \rightarrow \mathbf{Smod}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{M \otimes_R -} & M \otimes_R N \\ f \downarrow & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \downarrow \text{id}_M \otimes_R f \\ N' & \xrightarrow{M \otimes_R -} & M \otimes_R N' \end{array}$$

Tensör izleci modüller teorisindeki en etkin araçlardan biridir. Özel durumda, eğer  $R \subseteq S$  ise ve  $M = S$  alırsak,  $S \otimes_R -$  izleci alt halka  $R$ 'nin modüllerinden  $S$ -modüller üreten izleç olur. Küçük halkaların modüllerinden daha büyük halkaların modüllerini üreten bu işlem bir tür cebirsel tümevarımdır.

Bu noktada, yukarıda tanımını verdiğimiz hom-izleçlerinin farklı bir versiyonunu tanımlayacağız. Öncelikle modüller için hom-gruplarını tanımlayalım.  $M, N \in \mathbf{Rmod}$  olsun. Notasyonu basitleştirmek üzere,

$$\text{Hom}_R(M, N) = \text{Hom}_{\mathbf{Rmod}}(M, N)$$

yazalım. Bu küme üzerinde bir Abel grup yapısı tanımlayalım: Her  $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$  için,

$$f + g : M \rightarrow N, m \mapsto f(m) + g(m)$$

olsun. Bu işlemin gerçekten Abel grup işlemi olduğunu okuyucu kanıtlayabilir.

Dahası, eğer  $N' \in \mathbf{Rmod}$  ve  $h : N \rightarrow N'$  ise,

$$h^* : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N')$$

fonksiyonu yukarıdaki Abel grup yapısını korur. Dolayısıyla,

$$\text{Hom}_R(M, -) : \mathbf{Rmod} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

izlecinin görüntüsü aslında Abel grupları kategorisinde kalır, yani,

$$\text{Hom}_R(M, -) : \mathbf{Rmod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

olur.

Şimdi  $S$  halkasını da alalım ve  $M$ 'nin bir  $(R, S)$ -bimodül olduğunu varsayalım. Bu durumda  $\text{Hom}_R(M, N)$  grubunu aşağıdaki etkiyle bir  $S$ -modül yapabiliriz: Her  $s \in S$  ve  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$  için,

$$(s \cdot f)(m) = f(m \cdot s).$$

Eşitliğin sağ tarafında  $m \cdot s$  etkisi  $S$ 'nin  $M$  üzerindeki sağ modül yapısından gelmektedir. Sol-sağ değişimi bu etkinin birleşmeli olmasını sağlamaktadır. Detayları bir kez daha okuyucuya bırakalım.

Bu kurulumla birlikte hom-izlecinin asıl hedefini de bulmuş olduk.  $M$  bir  $(R, S)$ -bimodül olduğunda,

$$\text{Hom}_R(M, -) : \mathbf{Rmod} \rightarrow \mathbf{Smod}$$

izlecini elde ederiz.

Kurulumu bimodülleri bilmekten fazlasını gerektirmediğinden, hom ve tensör izleçleri hem modüller hem de temsiller için en kullanışlı araçlardır. Standart bimodül seçimleriyle ortaya çıkan bu iki izleci kullanıp bir halkanın modülleri için çok değerli sonuçları kanıtlamak mümkündür. Kategoriler teorisi yaklaşımıyla bu fikirleri takip etmek isteyen okurlar Berrick ve Keating'in kitabına göz atabilir.

## Kategoriler Kategorisi

Kategorileri nesnelere arasındaki ilişkileri incelemek üzere tanımladık. İzleçler ise kategoriler arasındaki ilişkilerdi. Öyleyse artık kategorilerin kategorisinden bahsedebiliriz. Paradokslara yol açmamak için dikkatli bir tanım yapacağız.

**Örnek 12.**  $\mathbf{KTGR}$  ile nesnelere küçük kategoriler morfizmalarıysa izleçler olan kategoriyi göstereceğiz. Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesinden türeyen işlem, kimlik morfizmasıysa tanımlı kolayca tahmin edilebilecek olan kimlik izlecidir.

$\mathbf{KTGR}$  kategorisinin devasa olduğunu söylemeye gerek yok! Hemen hemen tüm matematiği içerir ve başlangıçta hedeflediğimiz farklı matematiksel yapıları karşılaştırma için elverişli bir çerçeve

sunar. Karşılaştırma yaparken ilk bilmek istediğimiz, nesnelerin ne zaman eşit/eş-yapılı/denk olduğuydu. Aynı soruyu **KTGR** için soracağız.

Daha önce de gördüğümüz gibi eşit olmak çok sıkı bir kavramdı. Gruplar için, eşitlik grup yapısını tanımlayan kümelerin eşitliği demektir. Oysa ilginç olan tanım, daha zayıf bir kavram olmasına karşın, yapıların “eşitliği”ydi. Kategoriler için de benzer bir durum söz konusu, ama aşağıda göstermeye çalışacağımız gibi, bu soyutlama seviyesinde eş-yapılı olmayı da zayıflatmamız gerekli. Öncelikle kategorilerin izomorfizmasını tanımlayalım.

**Tanım 5.**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izlecisi verilsin. Eğer

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} \text{ ve } F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$$

eşitliklerini sağlayan bir  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  izlecisi varsa  $F$  izlecisine bir *izomorfizma* denir. Ayrıca  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorilerine de *eş-yapılı* denir.

Kısacası,  $\mathcal{C}$  ile  $\mathcal{D}$ 'nin eş-yapılı olması, bu kategorilerin **KTGR** içinde eş-yapılı olması anlamına gelmektedir. Daha açık bir ifadeyle, nesnelere birer ve örten eşlerken aralarındaki morfizmaları da birebir ve örten eşlememiz gerekir. Bu beklenti çok kısıtlayıcı olup kategorilerin özünü aykırıdır ve denk kabul edilmesi gerektiğini hissettiğimiz bazı kategorileri birbirinden ayırır. Kısıtlamayı daha net görmek için eş-yapılı ve eş-yapılı olmayan, ama olması gerektiğini hissettiğimiz kategori örnekleri bulmak gereklidir. Bu yazıda verebileceğimiz temel örnekler sınırlı olsa da birkaç tane listeleyelim. İlk örneğimiz eş-yapılı olan iki kategori veriyor.

- $G$  bir sonlu grup,  $\mathbb{F}$  bir cisim olsun.  $\mathbb{F}[G]$  ile  $G$ 'nin  $\mathbb{F}$  üzerindeki grup cebirini gösterelim. Şimdi  $G$ 'nin  $\mathbb{F}$ -temsillerinin kategorisi ile sol  $\mathbb{F}[G]$ -modüllerin kategorisi birbirine izomorfiktir. Bu sonuç temsil kuramında iyi bilinir ve temsilleri çalışmanın aslında modülleri çalışmaya denk olduğu anlamına gelir.

Temsiller teorisini bilenler, temsil ile modül kavramları arasında bir fark gözetmez. Kategori olarak eş-yapılı olmaları doğaldır. Ama aşağıdaki örnek buradaki eksikliği göstermektedir.<sup>4</sup>

- $\mathbb{F}$  bir cisim olsun. **FVek** ile sonlu boyutlu  $\mathbb{F}$ -vektör uzaylarının kategorisini göstermiştik. Bu kategori üzerinde bir izleç tanımlayacağız.  $V \in \mathbf{FVek}$  için  $V$ 'nin *eş-uzayını*  $V^*$ ,  $V$ 'den çıkan tüm doğrusal fonksiyonların<sup>5</sup>

uzayıdır. Eş-uzayın eş-uzayını da tanımlamak mümkün, bu uzayı  $V^{**}$  ile gösterelim. Bu kurulum,

$$-^{**} : \mathbf{FVek} \rightarrow \mathbf{FVek}, V \mapsto V^{**}$$

izlecini verir. Yer tasarrufu etmek için morfizmalar üzerindeki tanımı erteliyoruz. Doğrusal cebirden iyi bildiğimiz gibi,  $V$  ile  $V^*$  izomorfiktir; ancak bu izomorfizma, seçilecek bir tabana bağlı olduğundan, “doğal” değildir. Ne var ki  $V$  ile  $V^{**}$  izomorfizması, baz seçiminden bağımsız olup, doğaldır. Bu iki uzayı birbirinin aynı kabul etmek isteriz, yani eş-uzay almanın **FVek** kategorisinin bir öz-izomorfizması olmasını bekleriz. Ancak yukarıdaki tanımla bu doğru değildir; çünkü  $V$  ile  $V^{**}$  eşit değildir.


Bir diğer doğal örnek için sonlu kümeleri düşüneceğiz. **SnlK** ile sonlu kümeler ve aralarındaki fonksiyonların kategorisini gösterelim.

Bu kategorinin iyi bildiğimiz bir tam alt kategorisi bulunuyor: **SnlOrd** ile nesnelere,  $n \in \mathbb{N}$  için  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  kümelerinden oluşan alt kategoriyi gösterelim. Bu kategorinin önemli bir özelliği farklı iki nesnenin hiçbir zaman eş-yapılı olmadığıdır.

Sonlu kümelerle ilgili en önemli bilgilerden birisi, bu kümelerin eleman sayısını tanımlayabilecek olmamızdır. Eleman sayısı hesaplamamızın bir yolu, verilen  $X \in \mathbf{SnlK}$  ile **SnlOrd** kategorisinin nesnelere arasında bir izomorfizma bulmaktır.

Aslında sonlu kümeler söz konusu olduğunda, aralarında birebir ve örten fonksiyonlar bulunan böylesi iki kümeyi, sadece morfizmalara bakarak birbirinden ayırt edemeyiz. Dolayısıyla, bu bakış açısıyla, bu iki kategori birbiriyle denk gibi görünür. Ancak **SnlK**  $\neq$  **SnlOrd** olduğu da açıktır.

Buradaki sorunu kavramak yeni başlayanlar için kolay olmayabilir. Yukarıdaki iki örnekten öğrendiğimiz bilgi:

 İki kategori arasında ileri-geri gidip geldiğimizde başladığımız nesneyi değil de onunla doğal olarak eş-yapılı bir nesneyi bulabiliriz ve bu nesne, her ne kadar eşit olmasa da hemen hemen her durumda başladığımız nesnenin yerini tutar.

Dolayısıyla bu tür bir duruma da izin veren bir tanıma ihtiyacımız var. Bunu başarmak için bir adım daha öteye gitmeli ve izleçler arasındaki ilişkileri incelemeliyiz. İstedığımız şey tam olarak, izleçlerin birbirine eşit olmasa da (örneğin  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$  gibi) eş-yapılı olabileceğini söyleyen bir kavram ortaya atmak. *Doğal dönüşümler* adı verilen bu kavramı sıradaki yazımızda tanımlayacağız.

<sup>4</sup>Bu örnek aynı zamanda kategoriler teorisinin başlangıcı olan Eilenberg-MacLane makalesinin de girişidir. Kısaca değindiğimiz bu örneğin aslını herkesin okumasını tavsiye ederim.

<sup>5</sup>Hatırlatma: Bir doğrusal fonksiyonel  $f$ ,  $V$ 'den  $F$ 'ye tanımlı doğrusal dönüşüm demektir.

# Kategoriler Teorisi

## Doğal Dönüşümler ve İzleçler Kategorisi ☺

Olcaý Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Kategorileri nesnelere arasındaki ilişkileri ön plana çıkarıp inceleyen matematiksel yapılar olarak tanıttık ve çalıştık. Sonrasında kategorileri nesne kabul eden kategoriler kurabilmek amacıyla izleçleri, yani kategori morfizmalarını tanımladık. Yine de dikkat ederseniz amacımıza ulaştığımız söylenemez; çünkü temelde bilinen sonuçları isimlendirmiş olduk. Henüz çok yeni şeyler söyleyemedik.

Bu yazımız kategoriler teorisinin asıl önemini ortaya koyacak. Amacımız izleçler kategorisi kurabilmek. Bunun için ilk adımsa nesnelere izleçler olan bir kategori için morfizmalar tanımlamak olacak. Peki bu neden gerekli? Bir önceki yazımızın sonunda kategori izomorfizmalarından bahsetmiş ve bu kavramın çok kısıtlayıcı olduğunu söylemiştik. Kısıtlayıcılığın temelinde iki izlecin bileşkesinin kimlik izlecine eşit olması gerekliliği yatıyordu. Bu koşulu zayıflatılabilmek için eşitliği izomorfizmayla değiştireceğiz. Dolayısıyla izleçler arasındaki morfizmaları, yani doğal dönüşümleri, bu amacımıza da hizmet edecek şekilde tanımlamalıyız.

Doğal dönüşümler ve dolayısıyla izleç kategorileri teorisinin asıl gücüdür ve çok sayıda uygulamaları bulunmaktadır. En iyi bilinen sonuç olan Yoneda Önsavı'nın bir sonucu, gruplar için kanıtlanan Cayley Teoremi'nin bir versiyonunun kategoriler için doğru olduğunu söylemektedir, yani tüm kategoriler aslında izleç kategorisidir. Tüm kapak konusunun asıl sonucu olan bu önsavın, çok da zor olmayan kanıtı ve uygulamaları bir sonraki yazımızda olacak!

Verilen iki kategori  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  arasında,  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleçlerini alalım. Her  $X \in \mathcal{C}$  için  $\mathcal{D}$ 'nin  $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$  morfizmasını seçelim ve  $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathcal{C}}$  yazalım. Ayrıca  $X, Y \in \mathcal{C}$  için bir  $f : X \rightarrow Y$  morfizması verilsin. Bu durumda aşağıdaki diyagramı kurabiliriz.

$$\begin{array}{ccccc} X & & F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

Bu diyagramda soldaki sütun  $\mathcal{C}$  kategorisindeyken sağdaki kare  $\mathcal{D}$  kategorisinde bulunuyor.

**Tanım 1.** Yukarıdaki gösterimlerle, eğer  $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathcal{C}}$  morfizma ailesi her  $f \in \mathcal{C}$  morfizması için yukarıda verilen diyagramları değişmeli yapıyorsa, yani  $\mathcal{C}$ 'deki her  $f : X \rightarrow Y$  için,

$$G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\eta$ 'ya bir *doğal dönüşüm* denir ve  $\eta : F \Rightarrow G$  ile gösterilir.

Başka bir ifadeyle, doğal dönüşümler izleçlerin görüntüleri arasında bir uyumluluk olmasını sağlıyor. Tanım kategorisindeki tüm morfizmaların görüntülerini birbirine böyle uyumlu bir şekilde dönüştürebilmek verilen iki izleç arasında doğal bir ilişki bulunduğunu gösteriyor.

Doğal dönüşümleri göstermenin biraz da havalı bir yolu aşağıda:

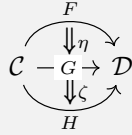
$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & \Downarrow \eta & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & G & \curvearrowright \end{array}$$

**Örnek 1.** Aşikâr olmayan örnekleri aşağıda vereceğiz, ama sıradaki tanımlar için gerekli kimlik morfizmasını görelim. Yukarıdaki tanımında, eğer  $F = G$  ve  $\eta_X = \text{id}_X$  alırsak diyagramların değişmeli olacağı açıktır. Dolayısıyla  $\text{id}_F := (\text{id}_X)_{X \in \mathcal{C}}$  morfizma ailesi  $F$ 'den  $F$ 'ye bir doğal dönüşümdür ve  $F$ 'nin *kimlik* morfizması olarak adlandırılır.

Doğal dönüşümlerin iki farklı şekilde bileşkesi mümkündür. Bizim için aşağıdaki yöntem yeterli olacak.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yukarıda tanımlı verdiğimiz bileşke "dik bileşke" olarak da bilinir. Tanımını şimdilik vermeyeceğimiz "yatay bileşke" 2-kategori tanımı için kaçınılmazdır.

**Tanım 2.** Yukarıdaki gösterimlere ek olarak  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izlecini alalım.  $\eta : F \rightarrow G$  ve  $\zeta : G \rightarrow H$  doğal dönüşümlerinin *bileşkesi*  $\zeta \circ \eta : F \rightarrow H$ 'yi  $(\zeta_X \circ \eta_X)_{X \in \mathcal{C}}$  morfizma dizisi olarak tanımlanır.



Tanımın gerçekte bir doğal dönüşüm verdiğini görmek için değişmeli olduğunu göstermemiz gereken bir diyagram bulunuyor. Bu problemi limitler yazımızda alıştırmaya vermiştik. Şimdi doğal izomorfizma tanımı yapmaya hazırız:

**Tanım 3.**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  kategorileri,  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleçleri ve  $\eta : F \Rightarrow G$  doğal dönüşümü verilsin. Eğer

$$\zeta \circ \eta = \text{id}_F \text{ ve } \eta \circ \zeta = \text{id}_G$$

eşitliklerini sağlayan bir doğal dönüşüm  $\zeta : G \Rightarrow F$  varsa  $\eta$ 'ya (ve  $\zeta$ 'ya) *doğal izomorfizma* denir. Eğer  $F$  ile  $G$  arasında doğal izomorfizma varsa,  $F$  ve  $G$ 'nin *doğal eş-yapılı* olduğunu söyler ve  $F \cong G$  yazarız.

Verilen bir izlecin doğal izomorfizma olduğunu gösterebilmek için tersini bulmak yerine her bir parçasının izomorfizma olduğunu göstermek de yeterlidir:

**Önsav 1.**  $\eta : F \rightarrow G$  doğal dönüşümü verildiğinde  $\eta$ 'nin bir doğal izomorfizma olması her  $A \in \mathcal{C}$  için  $\eta_A$ 'nin izomorfizma olmasına denktir.

Kanıtı zor olmayan bu önsavı kontrol etme görevini okuyucularımıza bırakıyoruz.

**Örnek 2.** İlk örneğimiz için izleçlerden birini alabildiğince basit alalım.  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleci  $x \in \mathcal{D}$  nesnesinde sabit izleç olsun, yani bütün  $A \in \mathcal{C}$  nesnelerini  $x$ 'e, bütün morfizmalarıysa  $\text{id}_x$ 'e götürsün.  $F$  yerine  $S_x$  yazalım.

Bu gösterimle,  $\eta : S_x \rightarrow G$ 'nin doğal dönüşüm olması için, her  $A \in \mathcal{C}$  için  $\eta_x : x \rightarrow G(A)$  morfizmasını seçmelidir. Ayrıca  $\mathcal{C}$  kategorisinde  $f : A \rightarrow B$  morfizması verildiğinde,

$$G(f) \circ \eta_A = \eta_B$$

eşitliği sağlanmalı. Eşitliğin sağ tarafında  $S_x(f)$

olmadığına dikkat ediniz. Bu morfizma  $x$ 'in kimlik morfizması olduğundan yazmamıza gerek yoktur.

Bu kurulumu tanıyabildiniz mi? Tanıyamadıysanız,  $G$ 'nin görüntüsünün  $\mathcal{D}$ 'de bir diyagram olarak görülebileceği ipucunu değerlendirin! Bu durumda  $(x, \eta)$  ikilisinin bir koni olduğunu görebilirsiniz.

Örneğin karşıtı düşünürsek, yani  $F$ 'yi değil de  $G$ 'yi sabit alırsak ortaya çıkacak olan doğal dönüşümlerin külahlara karşılık geleceği artık açıktır.

Her iki izlecin de sabit olduğu durumu değerlendirmeyi okuyucularımıza bırakıyoruz.

**Örnek 3.** İkinci örneğimiz için bu kez kategorilerden birini basitleştirelim.  $G$  sonlu grubunu ve bu grupla ilişkilendirdiğimiz bir nesneli  $\mathfrak{G}$  kategorisini alalım. Hatırlarsanız,

$$F : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

izleçleriyle  $G$ -kümeler arasında birebir eşleme vardı.

Öyleyse iki izleç  $F, F' : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Küme}$  alalım ve bunlara karşılık gelen  $G$ -kümeleri  $X = F(\star)$  ve  $Y = F'(\star)$  ile gösterelim.

Ayrıca  $\eta : F \Rightarrow F'$  bir doğal dönüşüm olsun. Tanım kategorisinde tek bir nesne olduğundan aslında  $\eta$  sadece bir tane fonksiyondan oluşacak:  $\eta_\star : X \rightarrow Y$ . Son olarak  $\eta$ 'nin sağlaması gereken uyumluluk koşulu, her  $g \in G$  için,

$$F'(g) \circ \eta_\star = \eta_\star \circ F(g)$$

eşitliğini verecektir. Bu eşitliği daha açık yazalım. Öncelikle  $F(g)$ 'nin  $g$ 'nin  $X$  üzerindeki etkisi anlamına geldiğini hatırlayalım. Dolayısıyla, her  $x \in X$  için, yukarıdaki eşitliği

$$g \cdot \eta_\star(x) = \eta_\star(g \cdot x)$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitlik  $\eta_\star$ 'ın  $G$ -etkisine saygı duyan bir fonksiyon (ya da  $G$ -küme homomorfizması) olduğu anlamına gelir.

**Örnek 4.** İzleç örneklerimizden bir diğeri kuvvet kümesi izleciydi:

$$\mathcal{P} : \mathbf{Küme} \rightarrow \mathbf{Küme}, \quad X \mapsto \mathcal{P}(X)$$

**Küme** kategorisinin kimlik izlecinden  $\mathcal{P}$ 'ye bir doğal dönüşüm  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Küme}} \Rightarrow \mathcal{P}$  tanımlayacağız. Her  $X \in \mathbf{Küme}$  için,

$$\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$$

fonksiyonu olsun, yani  $X$ 'in her elemanını bu elemanı içeren bir elemanlı alt kümeye gönderiyoruz. Bu tanımın bir doğal dönüşüm olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki kare diyagramın değişmeli olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{array}{ccc} X & X & \xrightarrow{\eta_X} \mathcal{P}(X) \\ \downarrow f & \downarrow f & \downarrow \mathcal{P}(f) \\ Y & Y & \xrightarrow{\eta_Y} \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

Tanımları uygulayıp hesaplayalım. Öncelikle sağa giden fonksiyonla başlarsak,

$$(\mathcal{P}(f) \circ \eta_X)(x) = \mathcal{P}(\{x\}) = \{f(x)\}$$

elde ederiz. Şimdi ilk olarak aşağıya giden fonksiyondan başlayalım:

$$(\eta_Y \circ f)(x) = \eta_Y(f(x)) = \{f(x)\}.$$

Görüldüğü gibi eşitlik var, dolayısıyla kare diyagram değişmelidir. Öyleyse  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Küme}} \Rightarrow \mathcal{P}$ 'nin bir doğal dönüşüm olduğunu kanıtlamış olduk.

**Örnek 5.** Yukarıdaki izleçler için doğal olmayan bir dönüşüm örneği de verelim.  $\lambda : \text{id}_{\mathbf{Küme}} \rightarrow \mathcal{P}$ 'nin  $X \in \mathbf{Küme}$  bileşenini,

$$\lambda_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto X$$

ile tanımlayalım, yani tüm elemanları  $X$  kümesine götürüyoruz. Bu kez elde edeceğimiz,

$$\begin{array}{ccc} X & X & \xrightarrow{\lambda_X} \mathcal{P}(X) \\ \downarrow f & \downarrow f & \downarrow \mathcal{P}(f) \\ Y & Y & \xrightarrow{\lambda_Y} \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

diyagramı her zaman değişmeli olmak zorunda değildir; çünkü önce sağa giderek yaptığımız hesap  $f(X) \subseteq Y$  verirken, önce aşağıya giderek yaptığımız hesap  $Y$  kümesini verir. Dolayısıyla  $\lambda$ 'nın tanımladığı fonksiyon ailesi bir doğal dönüşüm değildir.

**Örnek 6.** İlginç örneklerle ulaşabilmek için kategorilerimizi iyileştirmemiz gerektiği açık. Doğal dönüşümlerin en güzel örneklerinden biri olan bu örneğimiz temel halka ve determinant bilgisi gerektiriyor. İlk olarak **DHlk** ile değişmeli halkalar<sup>a</sup> kategorisini, **Tek** ile tekçelerin<sup>b</sup> kategorisini gösterelim. Bu kategoriler arasında iyi bilinen iki izleci hatırlayalım.

$M_n$ :  $R, S \in \mathbf{DHlk}$  olsun. Sabit  $n \in \mathbb{N}$  için, girdileri  $R$ 'den olan  $n \times n$  matrislerin kümesini  $M_n(R)$  ile gösterelim. Matris çarpımı altındaki  $M_n(R)$  bir tekçedir. Ayrıca  $f : R \rightarrow S$  halka homomorfizması verildiğinde,  $f$ 'yi girdilere ayrı ayrı uygulayarak elde ettiğimiz  $M_n(f) : M_n(R) \rightarrow M_n(S)$  fonksiyonu bir tekçe homomor-

fizması olur. O zaman,

$$M_n : \mathbf{DHlk} \rightarrow \mathbf{Tek}$$

izlecini tanımlamış olduk. (Kimlik morfizmalarının ve bileşkenin korunduğunun kanıtını okuyucumuza bıraktık.)

$\mathcal{F}$ : İkinci izlecimiz  $R$  halkasının toplama işlemini unutan unutkan izleç olsun, yani,

$$\mathcal{F} : \mathbf{DHlk} \rightarrow \mathbf{Tek}, \quad R \mapsto R, \quad f \mapsto f$$

Şimdi  $M_n$  izleciyle  $\mathcal{F}$  izleci arasında bir doğal dönüşüm kurabiliriz. Doğrusal cebir derslerinden hatırlanacağı üzere her matrisin bir determinantı vardır. Eğer  $X \in M_n(R)$  ise  $\det_R(X) \in R$  olur. Ayrıca,

$$\det_R(X \cdot Y) = \det_R(X) \cdot \det_R(Y)$$

eşitliği de doğrudur. Dolayısıyla,

$$\det_R : M_n(R) \rightarrow R$$

tekçe homomorfizması vardır. İddiamız  $\det = (\det_R)_{R \in \mathbf{DHlk}}$ 'nin bir doğal dönüşüm olduğudur. Bunun için aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğunu kanıtlamalıyız:

$$\begin{array}{ccc} R & M_n(R) & \xrightarrow{\det_R} R \\ \downarrow f & \downarrow \det(f) & \downarrow f \\ S & M_n(S) & \xrightarrow{\det_S} S \end{array}$$

Diyagramın değişmeli olduğunu kanıtlamak için tek hatırlamamız gereken, bir matrisin determinantının bu matrisin girdilerinin belli bir kuralla çarpılıp toplanmasıyla elde edilebileceğidir. Dolayısıyla, önce bu formülü uygulayıp daha sonra formüldeki elemanlara tek tek halka morfizması  $f$ 'yi uygulamakla önce  $f$ 'yi sonra formülü uygulamak sonucu değiştirmez! Bir diğer ifadeyle,

$$\det : M_n \Rightarrow \mathcal{F}$$

bir doğal dönüşümdür.

<sup>a</sup>Tüm halkalarda çarpma işleminin etkisiz elemanına sahip olduğunu varsayıyoruz.

<sup>b</sup>Tekçe, birim elemanı ve birleşme özelliği olan bir işlem altındaki kümelerdir. İngilizcesi *monoid* olan bu yapıya bazen *monoit* de denir.

Son örnek olarak bir önceki yazımızın sonunda açık bıraktığımız soruya dönelim ve bir doğal izomorfizma örneği bulalım.

**Örnek 7.**  $\mathbb{F}$  bir cisim olmak üzere,

$$-^* : \mathbf{FVek} \rightarrow \mathbf{FVek}$$

izlecini tanımlamış ve bu izlecin, her ne kadar nesnelere üzerinde izomorfizma üretse de bu izomorfizmanın doğal olmadığını belirtmiştik. Şimdi  $-^{**}$  izlecinin ürettiği izomorfizmaların doğallığını göstereyim. Bunun için kimlik izleciyle bu izleç arasında bir doğal izomorfizma bulacağız.

İkinci eş-uzay izlecinin doğal dönüşümlere etkisini tanımlamamıştık. Şimdi ihtiyacımız olacak. O yüzden eksik tanımları vererek başlayalım. İlk olarak  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü verildiğinde,

$$T^* : W^* \rightarrow V^*$$

doğrusal dönüşümü,  $\alpha : W \rightarrow \mathbb{F}$  fonksiyonelini,

$$T^*(\alpha) : V \rightarrow \mathbb{F}, \quad v \mapsto \alpha(T(v))$$

fonksiyoneline götürür. Öyleyse, bu işlemi bir kere daha tekrarlırsak,  $T^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$  doğrusal dönüşümü, her  $u \in V^{**}$  ve  $\alpha \in W^*$  için,

$$T^{**}(u)(\alpha) = u(T^*(\alpha))$$

olarak tanımlanmalı. Biraz karmaşık görüldüğü kesin, ama okuyucu kâğıt kalem alıp tanımların anlamlı olduğunu ve ortaya çıkan yapının bir izleç verdiğini görebilir.

Şimdi bizim amacımız,

$$\delta : \text{id}_{\mathbf{FVek}} \Rightarrow -^{**}$$

yazacağımız bir doğal izomorfizma bulmaktır. Tanımlayalım: Her  $V \in \mathbf{FVek}$  için,

$$\delta_V : V \rightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \text{ev}_v$$

olsun. Burada,

$$\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{F}, \quad \alpha \mapsto \alpha(v)$$

ile verilen “hesaplama” dönüşümüdür.  $\delta$ 'nın doğal dönüşüm olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki diyagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccc} V & & V \xrightarrow{\delta_V} V^{**} \\ \downarrow T & & \downarrow T \quad \quad \downarrow T^{**} \\ W & & W \xrightarrow{\delta_W} W^{**} \end{array}$$

Değişmeli olup olmadığını kontrol edelim:  $v \in V$  olsun. Görüntü  $W^{**}$  içinde olacağından, hesaplama için, ayrıca  $\alpha \in W^*$  seçelim.

$$\begin{aligned} ((T^{**} \circ \delta_V)(v))(\alpha) &= (T^{**}(\text{ev}_v))(\alpha) \\ &= \text{ev}_v(T^*(\alpha)) \\ &= \alpha(T(v)) \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} ((\delta_W \circ T)(v))(\alpha) &= (\delta_W(T(v)))(\alpha) \\ &= \text{ev}_{T(v)}(\alpha) \\ &= \alpha(T(v)) \end{aligned}$$

Eşitliklere ulaştık. Dolayısıyla  $\delta : \text{id}_{\mathbf{FVek}} \Rightarrow -^{**}$  bir doğal dönüşümdür. Son olarak, her parçası bir izomorfizma olduğundan  $\delta$  bir doğal izomorfizmadır.

**🔔** Sonuç olarak, ikinci eş-uzayı hesapladığımızda başladığımız vektör uzayıyla doğal olarak eş-yapılı olan bir vektör uzayı elde ettiğimizi göstermiş olduk.

## Temsil Edilebilir İzleçler

Yukarıda tanımını verdiğimiz hom-izleçlerinin bir genellemesi olan temsil edilebilir izleçler aracılığıyla, geniş bir izleç ailesini çalışmak mümkündür.

**Tanım 4.**  $\mathcal{C}$  kategorisi ve  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Küme}$  izleci verilsin. Eğer

$$F \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$$

doğal izomorfizmasını sağlayan bir  $X \in \mathcal{C}$  nesnesi varsa  $F$ 'ye *temsil edilebilir* izleç denir.

Temsil edilebilir izleçler çok yaygın olarak ortaya çıkmaktadır ve bir sonraki bölümde kanıtlayacağımız Yoneda Önsavı'yla birlikte uygulamaları da oldukça yaygındır. Hom-izleçlerinin limitleri koruması özelliği temsil edilebilir izleçlerde de bulunduğundan limit/eş-limit hesaplarında da büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Önceki sayfalarda tanımladığımız unutkan izleçlerin büyük bölümü temsil edilebilir izleçlerdir. Okuyucular alıştırma olarak bu izleçleri bulmayı deneyebilir. Yardımcı olmak üzere iki örnek verelim.

**Örnek 8.** Grup işlemini unutan,

$$\mathcal{F} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

izleci temsil edilebilirdir. Kanıt için  $\mathcal{F}$ 'yi temsil eden bir grup bulmalıyız. Detayları okuyucuya bırakıp,

$$\mathcal{F} \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, -)$$

olduğunu verelim.

**Örnek 9.** İkinci örneğimiz yine aynı kategoriler arasında.  $p$  bir asal sayı olsun.

$$\text{Soc}_p : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Küme}$$

izlecini  $G$ 'yi  $G$ 'deki mertebesi 1 ya da  $p$  olan elemanların kümesine götüren izleç olarak tanımlayalım. Kanıtım okurlara bırakacağımız iddiamız:

$$\text{Soc}_p \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, -)$$

### İzleç Kategorileri

Eş-yapılı izleç örneğimizi kategori denkliklerini tanımladıktan sonra vereceğiz. Öncelikle izleç kategorilerini tanımlayalım.

**Tanım 5.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri arasındaki *izleçler kategorisi*  $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ ,

1. nesnelere  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleçleri,
2.  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleçleri arasındaki morfizmalarınsa  $\eta : F \Rightarrow G$  doğal dönüşümler kümesi

$$\text{DD}(F, G)$$

olduğu kategoridir. Bileşke işlemi doğal dönüşümlerin bileşkesiyle, kimlik morfizmalarıysa izleçlerin kimlik morfizmalarıyla verilir.

İlerleyen sayfalarda ve genel olarak tüm kategoriler teorisinde, izleçler kategorisi denilince yukarıdaki tanım aklımıza gelir. Yani bu ismi kullandıktan sonra morfizmaların doğal dönüşümler olduğunu, bileşkenin yukarıdaki bileşkeyle verildiğini ayrıca belirtmeye gerek yoktur.

İzleç örneklerini tartışırken bilinen bazı kavramların izleçler aracılığıyla açıklanabileceğini göstermiştik. Yukarıdaki tanımı da kullanırsak bu sözlerimizi daha net ifade edebiliriz.

**Örnek 10.** İlk örneğimiz için grup etkilerinin izleçleri kullanan tanımını hatırlayalım.  $G$  bir grup,  $\mathfrak{G}$  ise karşılık gelen bir nesneli kategori olsun. Bu durumda  $G$ -etkileriyle  $(\mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Küme})$  izleçleri arasında birebir eşleme olduğunu görmüştük. Şimdi  $[\mathfrak{G}, \mathbf{Küme}]$  izleçler kategorisini düşünelim. Yukarıdaki eşlemeyi söylemenin en iyi yolu,

$$[\mathfrak{G}, \mathbf{Küme}] \cong G - \mathbf{Küme}$$

izomorfizmasını yazmaktır.

**Örnek 11.** Yukarıdaki örneğe benzer şekilde,  $H$  grubu ve karşılık gelen  $\mathfrak{H}$  kategorisi verildiğinde,

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$$

olur.

İzleç kategorileri aracılığıyla izleçleri cebirsel yapılar olarak değerlendirmek ve dolayısıyla bu tür kategorilerde “cebir yapmak” mümkündür. Bu yazı dizisinde yer vermeyecek olsak da *alt izleç*, *oran izleci*, *projektif izleç* gibi modül teoretik kavramları, uygun şartlar altında, izleç kategorilerine taşımak mümkündür.

Aşağıdaki bölümlerde göstereceğimiz gibi, tıpkı tüm grupların permütasyon grupları olarak düşünülebileceği gibi aslında tüm kategoriler de izleç kategorileri gibi düşünülebilir.

### Kategori Denklikleri

Bu bölümde önemli bir kavramı daha tanımlayacağız. Daha önce de bahsettiğimiz üzere kategorilerin eş-yapılı olması amaçladığımız esnekliğe sahip değildir. Aşağıdaki tanım bu yönden tatmin edici olacak:

**Tanım 6.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri ve  $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$  izleçleri verilsin. Eğer

$$G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}} \text{ ve } F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$$

doğal izomorfizmaları varsa  $F$ 'ye (ve  $G$ 'ye) *bir kategori denkliği*,  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$ 'yeysa *denk kategoriler* denir. Bu durumda  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  yazarız.

Dikkat ederseniz, bir izlecin denklik olması için tersi olması gerekli değil. Özel olarak, nesnelere örten olmak zorunda değil. Ancak yine de ters yönde öyle bir izleç olmalı ki bileşke aldığımızda baştaki nesneyle eş-yapılı bir nesneye dönebilelim. Ayrıca bu dönüş doğal olmalı, yani morfizmalarla uyumlu olmalı. Denk kategoriler üretmek kolay olmasa da birkaç temel örneğe bakalım. Sonrasında daha genel bir önermeyi de kanıtlayacağız.

**Örnek 12.** İlk örneğimizde vektör uzaylarının boyutlarıyla belirlenmesine kategori denklikleri kullanan bir açıklama yapacağız. Bu örnekte aynı zamanda kategori denklikleri için gerekenleri de göreceğiz: Tabii ki iki kategori gerekli, sonrasında iki izleç ve bu izleçlerin bileşkeleriyle kimlik izleçleri arasında iki doğal izomorfizma.

$\mathbb{F}$  bir cisim olsun.  $\mathbf{FVek}$  ile sonlu boyutlu  $\mathbb{F}$ -vektör uzaylarının kategorisini göstermiştik. Diğer kategorimiz  $\mathbf{Boy}$ 'u,

- nesnelere, negatif olmayan tamsayılar kümesi  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

- iki doğal sayı  $m, n$  arasındaki morfizmaları,

$$\text{Mor}_{\mathbf{Boy}}(m, n) = M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

olan kategori olarak tanımlayalım.<sup>2</sup> Bileşke işlemi matris çarpımı, kimlik morfizmasıysa birim matris olsun.

Şimdi izleçleri tanımlayalım. Öncelikle,

$$\mathcal{B} : \mathbf{FVek} \rightarrow \mathbf{Boy}$$

izlecini tanımlayalım. Her  $V \in \mathbf{FVek}$  için bir baz seçip sabitleyelim,  $\mathcal{B}_V$  olsun. Eğer  $V = \mathbb{F}^n$  ise bu uzay için baz olarak standart bazı seçelim. Bu seçimle,  $\mathcal{B}(V) = |\mathcal{B}_V|$  yazabiliriz, yani  $V$ 'yi  $V$ 'nin boyutuna gönderdik. Ayrıca eğer  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşümse ve  $T$ 'nin  $\mathcal{B}_V$  ve  $\mathcal{B}_W$  bazlarına göre matrisini  $[T]$  ile gösterirsek,  $[T]$  bir  $\mathcal{B}(V) \times \mathcal{B}(W)$ -matris olur. Böylece  $\mathcal{B}(T) = [T]$  tanımını yapabiliriz. Matris çarpımının tanımından dolayı bu tanımlar bize gerçekten bir izleç verir.

Diğer yöndeki izleç,

$$\mathcal{S} : \mathbf{Boy} \rightarrow \mathbf{FVek}$$

negatif olmayan tamsayı  $n$ 'yi standart bazla verilen sütun vektörlerinin uzayı  $\mathbb{F}^n$ 'ye götürsün. Ayrıca eğer  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  ise  $\mathcal{S}(A)$ 'yı soldan  $A$  ile çarpmaya karşılık gelen doğrusal dönüşüm olarak tanımlayalım. Bu tanımın da izleç olduğu açıktır.

Bileşkeleri hesaplayalım.

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{B} : \mathbf{FVek} \rightarrow \mathbf{FVek}$$

bileşkesi  $n$  boyutlu vektör uzayı  $V$ 'yi  $\mathbb{F}^n$  uzayına gönderirken  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümünüye,  $n = \dim V, m = \dim W$  olmak üzere  $[T] : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  doğrusal dönüşümüne göndermektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, her ne kadar  $[T]$  ile  $\mathcal{S} \circ \mathcal{B}([T])$  matrisleri aynı girdilere sahip olsalar da farklı vektör uzayları arasında olduklarından doğrusal dönüşüm olarak,

$$[T] : (V, \mathcal{B}_V) \rightarrow (W, \mathcal{B}_W)$$

ve

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{B}([T]) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

olduğundan bu dönüşümler birbirlerinden farklıdır.

Diğer yöndeki bileşke,

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{S} : \mathbf{Boy} \rightarrow \mathbf{Boy}$$

<sup>2</sup> $m = 0$  ya da  $n = 0$  olduğunda "sıfır matrisi" adını verdiğimiz biricik matris vardır. Matris çarpmasını sıfır matrisiyle çarpımı da içerecek şekilde genişletiyoruz.

<sup>3</sup>Bu doğrusal cebirde standart bir sonuçtur, hatırlamayan okurlarımıza klasik doğrusal cebir kitaplarına bakmalarını tavsiye ederiz.

ise kimlik izlecine eşittir. Gerçekten, ilk olarak  $n \in \mathbf{Boy}$ 'u  $\mathbb{F}^n$ 'ye sonraysa bu vektör uzayını boyutu olan  $n$ 'ye göndeririz. Morfizmalar üzerinde de benzer bir durum bulunuyor. Dolayısıyla,

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{S} = \text{id}_{\mathbf{Boy}}$$

olur.

Hedeflediğimiz kategori denkleğini elde etmek için tek yapmamız gereken,

$$\eta : \mathcal{S} \circ \mathcal{B} \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{FVek}}$$

doğal izomorfizmasını (ya da tersi  $\zeta : \text{id}_{\mathbf{FVek}} \Rightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{B}$ 'yi) bulmak.

Her vektör uzayı  $V \in \mathbf{FVek}$  için,

$$\zeta_V : V \rightarrow \mathbb{F}^{\dim V}$$

doğal dönüşümünü  $v \in V$  vektörünü bu vektörün  $\mathcal{B}_V$  bazındaki koordinat vektörüne göndersin. Bu dönüşümün tersidir olduğu, yani  $\mathbf{FVek}$ 'te bir izomorfizma olduğu, vektör uzayları ve bazlarının genel özelliklerinden dolayı, açıktır. Öyleyse,  $\zeta$ 'nin doğal izomorfizma olduğunu göstermek için tek yapmamız gereken doğallık koşulunun sağlandığını göstermektir, yani aşağıdaki kare diyagramın değişmeli olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\zeta_V} & \mathbb{F}^{\dim V} \\ \downarrow T & & \downarrow [T] \\ W & \xrightarrow{\zeta_W} & \mathbb{F}^{\dim W} \end{array}$$

Buradaki hesap oldukça kolay, önce koordinat hesaplayıp  $[T]$  matrisiyle soldan çarpmak, önce  $T$  uygulayıp sonra koordinat hesaplamaya denktir!<sup>3</sup> Böylece,

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{S} = \text{id}_{\mathbf{Boy}} \text{ ve } \mathcal{S} \circ \mathcal{B} \cong \text{id}_{\mathbf{Boy}}$$

doğal izomorfizmalarının ve dolayısıyla,

$$\mathbf{FVek} \simeq \mathbf{Boy}$$

kategori denkleğinin varlığını kanıtlamış olduk. Daha önce de belirttiğimiz gibi bu denklik bize, vektör uzaylarının sadece ve sadece boyutları tarafından belirlendiğini söylüyor.

**Örnek 13.** Yukarıdakine benzer olarak kanıtlanabilecek bir diğer denklik,

$$\mathbf{Met} \simeq \mathbf{MetTop}$$

metrik uzaylar kategorisiyle metriklenebilir topolojik uzaylar kategorisi denktir. Bu örneklerin her ikisinde de morfizmalar sürekli fonksiyonlar olarak alınmalıdır. Kanıtı bu kategorileri tanıyan okurlarımıza bırakıyoruz.

**Örnek 14.** Bir diğer örnek için  $R$  bir halka olsun.  $\mathbf{Rmod}$  ile  $R$ -modüllerin kategorisini göstermiştik. Ayrıca girdileri  $R$ 'den olan  $n \times n$  matrislerin halkası için  $\text{Mat}_n(R)$  yazıyoruz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\mathbf{Rmod} \simeq \text{Mat}_n(R) - \mathbf{mod}$$

denkliği vardır. Yani bir halkanın modülleriyle bu halka üzerindeki herhangi bir matris halkasının modülleri birbirine denktir.<sup>a</sup> Bu kanıtı da yine modüller teorisi bilen okurlarımıza bırakıyoruz.

<sup>a</sup>Bu örnekten de görüleceği gibi, iki halkanın modül kategorilerinin denk olması bu halkaların eş-yapılı olmasını gerektirmez. Modül kategorileri denk olan halkalara *Morita denk halkalar* denir. Morita denk halkaların birçok ortak özelliği vardır.

Çok sayıda kategori denkliği bilinse de burada verebileceğimiz örnekler çok sınırlı ve yukarıdakiyle yetineceğiz.

Örnekte de görüleceği gibi, kategori denkliği bulmak zorlu bir iştir. Aşağıdaki sonuç bir izlecin kategori denkliği olduğunu göstermek için ters yönde bir izleç bulmanın alternatifini sunuyor.

**Teorem 1.**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  kategorileri ve  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  izleci verilsin.  $F$ 'nin bir kategori denkliği olması  $F$ 'nin dolu, sadık ve özünde örten olmasına denktir.

*Kanıt.* Önce  $F$ 'nin bir kategori denkliği olduğunu, yani bir  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  izleci ve  $\zeta : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  ve  $\eta : GF \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  doğal izomorfizmaları olduğunu varsayalım. Amacımız  $F$ 'nin dolu, sadık ve özünde örten izleç özelliklerini taşıdığını göstermek.

-  **$F$  sadıktır:**  $\mathcal{C}$  kategorisinde görüntüleri eşit olan iki morfizma  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  verilsin, yani  $F(f_1) = F(f_2)$  olsun.  $\eta$ 'nın doğallığını kullanırsak aşağıdaki diyagramları buluruz:

$$\begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ \downarrow GF(f_1) & & \downarrow f_1 \\ GF(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ \downarrow GF(f_2) & & \downarrow f_2 \\ GF(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \end{array}$$

Şimdi bu diyagramların değişmeli olmalarını kullanıp aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz. Okurlar diyagramları dikkatlice takip etmeli:

$$\begin{aligned} f_1 \circ \eta_X &= \eta_Y \circ GF(f_1) \\ &= \eta_Y \circ GF(f_2) \\ &= f_2 \circ \eta_X \end{aligned}$$

$\eta_X$  izomorfizma olduğundan  $f_1 = f_2$  buluruz. Aynı fikri kullanıp  $G$ 'nin de sadık olduğunu kanıtlayabiliriz.

-  **$F$  doludur:** İki nesne  $X, Y \in \mathcal{C}$  ve bir morfizma  $g : F(X) \rightarrow F(Y)$  verilsin. Amacımız  $g = F(f)$  olacak bir  $f : X \rightarrow Y$  bulmak. İddiamız  $f = \eta_Y \circ G(g) \circ \eta_X^{-1}$  olduğu. Gerçekten de yukarıdaki diyagramlar bu  $f$  için de değişmeli olacağından,

$$\eta_Y GF(f) = f \circ \eta_X$$

doğrudur. Aynı zamanda  $f$ 'nin tanımından,

$$f \circ \eta_X = \eta_Y \circ G(g) \circ \eta_X^{-1} \circ \eta_X = \eta_Y \circ G(g)$$

olur, yani  $\eta_Y GF(f) = \eta_Y \circ G(g)$ 'dir. Ama  $\eta_Y$  mono olduğundan  $GF(f) = G(g)$  olur. Son olarak  $G$  sadıktı, dolayısıyla  $g = F(f)$  elde ederiz.

-  **$F$  özünde örten dir.**  $Z \in \mathcal{D}$  ve  $X = G(Z) \in \mathcal{C}$  verildiğinde,

$$F(X) = FG(Z) \cong \text{id}_{\mathcal{D}}(Z) = Z$$

sağlandığından  $F$  özünde örten dir.

Böylece  $F$ 'nin dolu, sadık ve özünde örten olduğunu kanıtlamış olduk. Aksi yöndeki iddiayı kanıtlamak üzere  $F$ 'nin dolu, sadık ve özünde örten olduğunu varsayalım ve bir kategori denkliği olduğunu kanıtlayalım. Yapmamız gereken, aksi yönde bir  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  izleci ve yukarıda da yinelediğimiz doğal izomorfizmaları kurmak.

$F$  özünde örten olduğundan, her  $Z \in \mathcal{D}$  için  $F(X_Z) \cong Z$  olan bir  $X_Z \in \mathcal{C}$  nesnesi vardır. Öyleyse,  $G(Z) = X_Z$  olsun ve  $g_Z : FG(X_Z) \rightarrow Z$  izomorfizmasını sabitleyelim.  $\mathcal{D}$ 'de  $f : Z \rightarrow T$  morfizması verildiğinde,

$$FG(X_Z) \xrightarrow{g_Z} Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g_Y^{-1}} FG(X_Y)$$

bileşkesini düşünelim.  $F$  dolu ve sadık olduğundan,  $F(h_f) = g_Y^{-1} f g_X$  olacak bir  $h_f : G(X) \rightarrow G(Y)$  morfizması vardır. Şimdi  $G(f) = h$  olarak tanımlayalım. Sonuç olarak,

$$G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \quad Z \mapsto G(X_Z), \quad f \mapsto G(H_f)$$

dönüşümünü tanımlamış olduk.  $G$ 'nin izleç olduğuna emin olmamız gerekli. Öyleyse  $\mathcal{D}$ 'de  $z : Z \rightarrow T$  ve  $t : T \rightarrow U$  morfizmaları verilsin.  $G(t) \circ G(z)$  bileşkesini hesaplamalıyız. Önce  $F$  altındaki görüntüsüne bakalım:<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} F(G(t) \circ G(z)) &= F(G(t)) \circ F(G(z)) \\ &= g_U^{-1} t g_Y \circ g_Y^{-1} z g_X \\ &= g_U^{-1} t z g_X \\ &= F(G(tz)) \end{aligned}$$

<sup>4</sup> $F$ 'nin izleç olmasından yararlanacağız!

$F$  izleci sadık olduğundan yukarıdaki eşitlik bize  $G(t) \circ G(z) = G(tz)$  olduğunu verir. Benzer şekilde  $G$ 'nin kimlik morfizmalarını kimlik morfizmalarına gönderdiği de gösterilebilir. (Alıştırma!) Böylece  $G$ 'nin bir izleç olduğunu kanıtlamış olduk. Bu kanıt dikkatlice incelerseniz yukarıda seçtiğimiz  $g = (g_Z)_{Z \in \mathcal{D}} : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ 'nin bir doğal izomorfizma olduğunu görebilirsiniz. (Alıştırma!)

Son olarak  $\eta : GF \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  olan bir doğal izomorfizma bulmalıyız. Kanıtı daha fazla uzatmamak amacıyla bunu da alıştırma olarak bırakalım.<sup>5</sup>  $\square$

Bu bölümü cebirde sıklıkla başvurduğumuz, her türlü nesneyi sadece eş-yapı sınıf temsilcileri üzerinden düşünme yaklaşımına da açıklama olacak aşağıdaki sonuçla tamamlayalım:

**Önerme 1.** Aşağıdaki önermeler tüm kategoriler için doğrudur.

1. Her kategori, iskeletine denktir.
2. İki kategorinin denk olması bu kategorilerin iskeletlerinin eş-yapılı olmasına denktir.

*Kanıt.*  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $\mathcal{D}$  bu kategorinin bir iskeleti olsun. Doğal olarak,

$$\iota : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

içerme izleci vardır.  $\iota$ 'nın sadık ve dolu olduğu açıktır. Ayrıca iskelet tanımından dolayı  $\iota$  özünde örtendir ve dolayısıyla bir önceki teoremden dolayı bir kategori denkliğidir. İkinci iddia açıktır.  $\square$

<sup>5</sup>Bazı okurlarımız bu kanıtta gizli olarak seçme aksiyomunu kullandığımızı ve bunun bir sorun olduğunu düşünebilir. Daha önce de belirttiğimiz gibi hem kümeler hem de sınıflar için seçme aksiyomunu kabul ediyoruz.