

# Sonlu Grup Temsilleri

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com



Grup benzeri yapılar her zaman matematiğin içinde olsa da grup kavramı ilk olarak Galois'ın polinomların kökleriyle katsayıları arasındaki ilişkileri araştırmasıyla netleşmiştir. Bu çalışmanın ardından gruplara olan ilgi çok hızlı bir şekilde artmış olup teorik gelişimin yanı sıra uygulamaları matematik ve yakın alanlarda kendini göstermeye başlamıştır.

Grup etkilerini kullanarak gruplar hakkında bilgi elde etmeyi insan ilişkilerine de uygulayabiliriz. Bir insanı tanımamın yollarından biri, onu diğer insanlardan ayırt edecek özelliklerini anlamamızı sağlayacak aktivitelerde görmek olabilir. Birlikte sinemaya gitmek, toplantılara katılmak, oyun oynamak, yani diğer insanlar ve nesnelere etkileşime girmesini sağlamak iyi bir yöntemdir.

Bu yazının amacı sonlu grupların etkilerini inceleyen grup temsilleri teorisine giriş yapmak olacak. Grup etkilerini simetrliler olarak düşünebiliriz, dolayısıyla simetrisi olan her matematiksel nesnenin üzerinde bir grup etkisi yaratılabilir.

En bilinen örnek, kümeler üzerine olan etkilerdir. Kümelerin simetrlileri permütasyonlar olduğundan, gruplar kümeler üzerine, kümenin elemanlarını karıştırarak etki eder. Bu basit başlangıç fikri uygulamalarda Sylow'un Teoremleri, Burnside'in Sayma Teoremi gibi hem derin hem de kullanışlı teoremler kanıtlamamızı sağlar!

Küme üzerine olan etkiyi hatırlayalım:

$G$  bir grup,  $X$  bir küme ve  $\rho : G \times X \rightarrow X$  bir fonksiyon olmak üzere, eğer her  $g, h \in G$  ve  $x \in X$  için,

1.  $\rho(1, x) = x$ ,
2.  $\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x))$

eşitlikleri sağlanıyorsa  $X$ 'e bir  $G$ -kümesi denir. Ayrıca  $G$ 'nin  $X$  üzerinde etkisi vardır da deriz.

Notasyonu daha kullanışlı hale getirmek için  $\rho(g, x)$  yerine  $g \cdot x$  yazalım. (Şimdi yapmayacak olsak da  $\cdot$  yerine hiçbir şey yazmadan  $gx$  olarak devam etmek de kabul edilebilir bir gösterimdir.)

Böylece yukarıdaki koşullar, her  $x \in X$  ve  $g, h \in G$  için,

- 1)  $1 \cdot x = x$ ,
- 2)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

olarak yazılabilir. İlk koşul  $G$ 'nin birim elemanının birim permütasyon olarak etki ettiğini, ikinci koşul ise etkinin birleşmeli olduğunu veriyor.

Bu tanımın ortaya çıkardığı teoremin temellerini *Matematik Dünyası*'nın 2013 yılı kapak konularında bulabilirsiniz. Ali Nesin'in gruplar teorisini anlattığı bu bölümler ayrıca web sayfamızda da yer alıyor.

Yukarıdaki durumun bir adım ötesine geçmek istersek, kümeler yerine üzerinde yapı olan matematiksel nesnelere etki edebiliriz. Örneğin,  $X$  kümesi yerine bir abelyen grup ya da bir vektör uzayı alabiliriz. Bu sayımızda ikinci durumu tercih edeceğiz, biraz ilerleme sağladığımızda aslında abelyen gruplara olan etkileri çalışmamın daha zor olduğu gözlenebilir!

Şimdi  $\mathbb{K}$  bir cisim ve  $V$  bir  $\mathbb{K}$ -vektör uzayı olsun. Vektör uzaylarına giriş için *Matematik Dünyası* 2014 sayılarına bakabilirsiniz. Cebirsel olarak,  $V$  bir abelyen grup olup elemanlarını  $\mathbb{K}$ 'nin elemanlarıyla çarpmamıza müsaade eder. Bir başka ifadeyle,

$$\mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

olarak gösterilen ve her  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  ve  $v, w \in V$  için,

- 1)  $1v = v$ , 2)  $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ ,
- 3)  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ , 4)  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon vardır. Dikkat ederseniz,  $\mathbb{K}$ 'nin  $V$  üzerinde doğrusal bir etkisinden bahsettiğimiz aşikâr! Bizim istediğimiz grupların vektör uzaylarına etkilerini incelemektir. Tanımı yapabiliriz:

$G$  bir grup,  $V$  bir  $\mathbb{K}$ -vektör uzayı ve  $\rho : G \times V \rightarrow V$  bir fonksiyon olsun. Eğer,

- 1)  $1 \cdot v = v$ , 2)  $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$ ,

$$3) \quad g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$$

eşitlikleri sağlanıyorsa  $V$ 'ye *doğrusal  $G$ -uzayı* ya da  $G$ 'nin bir temsili denir.

İki tanımı karşılaştırsak  $G$ 'nin etkisinden beklentimizin, birim elemanın birim fonksiyon olarak etki etmesi ve grup işlemiyle uyumlu olması olduğunu görürüz. Grubun vektör uzayına olan etkisinde koyduğumuz ek koşul,  $\rho$  fonksiyonunun doğrusal olmasını sağlamaktadır.

Daha soyut durumlarda da temel beklentimiz bu iki özellik olacak: Grup yapısından gelen iki koşul sağlanmalı ve grubun etkisi, etki ettiğimiz nesnenin yapısını korumalı. Bir diğer deyişle, etkiden ortaya çıkan fonksiyonun bir homomorfizma olmasını isteriz. Beklentimizi belirlediğimize göre örnekleri çoğaltmak zor değil!

Grup etkilerini çalışmayla değişik yönlerde sonuçlar elde etmek mümkün. Başlangıçta amacımız grupların yapıları hakkındaki sorulara cevap verecek bir araç elde etmektir. Ama teoriyi ilerlettikçe etki edilen nesnelere hakkında da sonuçlar elde edebileceğimizi fark ederiz. Bu gözlemi kullanarak elimizdeki problemi çözmeye yardımcı olacak grup etkileri kurmayı deneyebiliriz. Bunun en güzel örneklerinden birisi, Burnside'in Önsavı olarak bilinen (ama aslında Burnside'in kanıtlamadığı) sonuçtur. Buna göre eğer  $X$  bir  $G$ -kümesiye  $X$ 'in eleman sayısını  $G$  etkisinin yörüngelerini kullanarak, yörüngelerin eleman sayılarını karşılaştıran altgrupların indeksleriyle belirlenir.

Kapak konusu olarak belirlediğimiz *Sonlu Grupların Temsilleri* birçok üniversitede lisans düzeyinde ders olarak okutulan bir konudur. Ben de Boğaziçi Üniversitesi'nde uzun yıllar boyunca defalarca bu dersi verdim. Yazıların temelini bu derslerin notları oluştursa da sunumu biraz değiştirdim. Temel grup teorisi ve doğrusal cebir bilgisine sahip olan herkesin rahatça takip edebileceğini düşünüyorum. Aşağıdaki tarihenin sonunda yazıların devamının nasıl getirilebileceğine dair önerilerim olacak, ama bir dönemlik bir derse örnek olabilmek için Boğaziçi'ndeki dersin içeriği hakkında detay vermek istiyorum.

Tam adı *Math 324 Representation Theory of Finite Groups (Sonlu Grupların Temsil Teorisi)* olan bu derste kaynaklar listesindeki kitapları kullanıyorum. Dersin ön koşulu doğrusal cebir ve gruplar teorisi dersleri, ama ek olarak, öğrencilerin halkalar ve cisimler teorisi derslerini de en az bir kere takip etmiş olmalarını bekliyorum. Doğrusal cebir dersimiz standart içeriğe sahip, gruplar teorisiye temel tanımlardan başlayıp Sylow'un Teoremlerinin kanıtı, sonlu abel gruplarının sınıflandırılması ve çözülebilir gruplara kısa bir giriş kapsayacak

derinlikte. Halkalar ve cisimler teorisindeyse bu nesnelere temel özelliklerinden başlamak üzere karakteristik sıfırda Galois'ın Teorisi'ni kanıtlayacak derinliğe ulaşıyor.

Bu açıdan bakıldığında ders ileri düzey görülebilir ancak bu derslerin tüm gücünü kullanmadığımız için konuyu daha az bilgiyle de takip etmek mümkün. Örneğin abel gruplarının sınıflandırılmasını bilmek gerekli, ama Sylow'un Teoremlerinin kanıtlarını hatırlamadan da devam edilebilir. Cisimler teorisinin tüm detayları gerekmez, ama rasgele bir cisim üzerinde vektör uzayı düşünebilmek temsillerin yapısını çözümlenmek için, eninde sonunda gerekli olacaktır.

Bunları göz önüne alıp, dersin ilk haftasında sıklıkla ihtiyaç duyulacak sonuçları ve örnekleri tartışarak başlıyorum. Öğrenciler hem doğrusal cebirin temellerini hatırlamış oluyor (örneğin bir doğrusal dönüşümün matrisi nasıl bulunur, öz değerleri nelerdir gibi soruların cevaplarını hatırlıyoruz) hem de dönem boyunca aklımızda tutup soyut teorileri somutlayacağımız düşük mertebeli grupların listesini ve  $S_3, S_4, D_8$  gibi grupların ayrıntılı yapısını, altgrup kafeslerini, eşlenik sınıflarını görmüş oluyor.

Girişten sonra dersi 3 kısma ayırıyorum. İlk kısımda temel temsil teorisi ve grup cebirinin özelliklerini inceliyoruz. Bu kısım konuya cebirsel yaklaşımı detaylı olarak gösteriyor. İlk üç yazımızda bu bölümün sadeleştirilmiş bir versiyonunu sunacağım. Bu bölümde indirgenemez temsiller, dolaysız toplamlar, Maschke'nin ve Schur'un teoremleri ile abel gruplarının temsillerini tartışacağız. Bu sunumdan farklı olarak, dersin içeriğinde modüller teorisinden bahsedip grup cebirini ve onun modüllerini de anlatıyorum. Ancak teorisinin gelişiminde de olduğu gibi bu bölüm daha ileri seviyelere ulaşmaya kadar göz ardı edilebilir. Temel örnekleri yazıların içinde sunduk. Bir de *Örnekler* başlıklı yazımızda, okuyucuların çalışma sırasında ihtiyaç duyacakları örnekleri bir araya getirdik. Yazılara paralel olarak okunmasını bekliyoruz.

Dersin ikinci kısmında karakterleri tanıtır ve kompleks vektör uzayları için karakterlerin temsillere denk olduğunu kanıtlayacağız. Bu kanıtla birlikte analitik yöntemlere erişim sağlayıp iç çarpım uzaylarından gelen klasik tekniklerle temsiller hakkında bir çok temel sonucu kanıtlayabiliyoruz. Dördüncü yazımız bu yaklaşım üzerine yazıldı. Karakterlerin, eşlenik sınıfları üzerinde sabit olan sınıf fonksiyonlarının uzayına baz olduğunu, tanımlayacağımız doğal bir iç çarpım altında bu kümenin elemanlarının birbirine dik olduğunu ve çarpma-toplama altında kapalı olduklarını bu bölümde gösteriyoruz. Son olarak *Karakter Tablosu Örnekleri* yazımızda yeni karakter bulma tekniklerini bir araya topladık.

yıp düşük mertebeden örnekler verdik. Ayrıca abel olmayan en düşük mertebeli basit grup  $A_5$ 'in karakter tablosunu da kurduk.

Dersin son bölümü ileri düzey sayılabilecek konuları içeriyor. Öncelikle genel modüller için tensör çarpımını öğretip altgruplardan temsilleri yükseltmek için bir kurulum tanımlıyoruz. Yükseltme ya da Çekim adını verebileceğimiz (*İng. Induction*) bu kurulum aslında yeni temsil üretmenin en etkin yolu. Bu kurulumla ilgili örneklerden sonra karakter değerlerini yakından incelediğimiz bölüme geçiyoruz. Burada iki temel amaç bulunuyor, ilki indirgenemez karakterlerin derecelerinin grubun mertebesini böldüğünü göstermek, ikincisiyse Burnside'in  $p^a q^b$ -teoremini kanıtlamak. Bu sonuçlar için cebirsel sayılar hakkında temel bilgilerle birlikte Galois etkilerine de aşına olmak gerekiyor. Zaman kalması durumunda Frobenius'un Normal Tümlen Teoremi'ni de kanıtlıyorum. Bu sayımızda, gerekli önbilgilerin çokluğundan dolayı, son bölümden bahsetmeyeceğiz.

Bahsettiğimiz bu ileri konulara girmeyen bir ders tasarlamak da mümkün. Bu durumda hem temsiller hem de karakterler için örnekler çeşitlendirilebilir, temsillerin gruplara olan uygulamalarından bahsedilebilir ya da simetrik grupların temsillerine giriş yapılabilir. İleri düzey olacak bir devam dersindeyse hem yukarıdaki konular hem de bu yazının sonunda bahsedilen konulardan seçmeler yapılabilir. Kategori teori girişi yapılması durumunda aksiyomatik yöntemlerden de bahsetmek mümkün olacaktır.

## Kısa Bir Tarihçe

Grup temsilleri fikri ilk olarak 1896'da F. G. Frobenius tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmiştir. T. Y. Lam'in makalelerinin girişinde belirttiği gibi Frobenius'un sonlu grupların temsillerini tam olarak nasıl ortaya attığını biliyoruz. Kısa tarihçemiz teoriyi geliştiren dört önemli ismi anmaktan öteye geçmeyecek. İlgili okuyuculara T. Y. Lam'in yazı dizisinin yamı sıra Curtis'in mükemmel kitabı *Pioneers of Representation Theory* [3]'yi de tavsiye ediyoruz.

Tüm hikâye R. Dedekind'in Frobenius'a yönelttiği bir soruyla başlıyor. Aynı makalede de belirtildiği gibi Dedekind, Frobenius'a *grup determinanti* adı verilen homojen bir polinomun çarpanlara ayrılma problemini sorar. Abel grupları için cevabı bilen Dedekind tüm sonlu gruplar için çözüm aramaktadır. Dedekind'e yazdığı 12 Nisan 1896 tarihli mektubunda, Frobenius, çarpanlara ayırma konusunda bulunduğu yeni fikrinden bahsetmektedir. Sonrasında bugün hâlâ kullandığımız temel sonuçlar Frobenius tarafından üretilmiştir.

Frobenius'un çalışmalarına daha sonra hem W.

Burnside hem de Frobenius'un öğrencisi I. Schur katılmıştır. Bu üçlünün çalışmalarıyla teorinin temelleri ortaya çıkmıştır. Bu sayımızda bahsedeceğimiz sonuçların hemen hemen hepsi bu matematikçilere aittir.



F. G. Frobenius (26 Ekim 1849 – 3 Ağustos 1917)

Burnside'in gruplar teorisine olan ilgisi basit sonlu gruplar ve permütasyon gruplarıyla başlamıştır. Bu alanların muciti olmasa da Burnside'in çabalarıyla bugün bile ilgi çeken konular halini almıştır. Frobenius'un 1890'larda geliştirdiği sonlu grup temsilleri teorisini de ilk kullanan ve gelişimine büyük katkı veren isim Burnside olmuştur. Her ne kadar birbirlerini tanınmasalar da birbirlerinin sonuçlarını kullanmış ve geliştirmişlerdir.



W. Burnside (2 Temmuz 1852 – 21 Ağustos 1927)

Yukarıda da bahsettiğimiz Burnside'in  $p^a q^b$  Teoremi bugün bile sonlu grup temsillerinin en önemli uygulamalarından biri olarak kabul edilmektedir. Sayısız önemli katkısının yanında Burnside'in en önemli öngörülerinden birisi de bugün *Tek Mertebeliler Teoremi* ya da kanıtlayanların ismiyle *Feit-Thompson Teoremi* olarak bilinen ve mertebesi tek olan grupların çözülebilir olduğunu iddia eden öngürüdür. Bu teorem aynı zamanda abel olmayan tek mertebeden basit sonlu grup olmayacağına denk olduğundan, basit sonlu grupların sınıflandırma teoremi için de ilk adım olmuştur.

Teorinin üçüncü önemli ismi I. Schur'dur. Frobenius'un öğrencisi olan Schur teoriye yepyeni bir yaklaşım getirmiş ve teoriyi daha geniş bir kitle-

nin erişimine açmıştır. Bugün anladığımız anlamda temsillerin tanımını ve iyi bilinen Schur Önsavı'nı kendisine borçluyuz. Ayrıca sonsuz grupların temsilleri üzerine de çalışmalar yapmıştır.

Frobenius'la birlikte gerçel karakterler ve temsiller üzerinde de çalışan Schur'un en önemli keşiflerinden birisi de *projektif temsiller* dediğimiz projektif uzaylar üzerindeki temsillerdir. Son olarak genel doğrusal grupların polinom temsilleri de Schur tarafından ortaya atılan kavramlar arasındadır.



I. Schur (10 Ocak 1875 – 10 Ocak 1941)

Sonlu grupların temsillerinin gelişiminde en büyük rollerden birisi de R. Brauer'e aittir. Frobenius'un başlattığı ve hızla gelişen karakter teorisi katkılarının yanı sıra karakteristiği grubun mertebesini bölen cisimler üzerindeki vektör uzaylarına etkileri düşünüp, bugün *modüler temsil teorisi* adını verdiğimiz teoriyi üretmiştir. Uzun yıllar boyunca neredeyse tek başına geliştirdiği bu teori basit sonlu grupların sınıflandırma probleminde de önemli anahtarlardan biri olmuştur. Brauer'in ortaya attığı bir çok temel problem bugün bile çözüm beklemektedir.

## Neler Yok?

Kapak konumuzun içeriğini başlıklardan tahmin etmek mümkün. Neleri anlatmadığımız hakkında da birkaç ipucu verelim. Okuyucular bu ipuçlarını takip ederek bir ömür geçirebilir!

İlk olarak sadece sonlu grupları göz önüne alacağız. Tabii ki sonsuz grupların temsillerini düşünmek de mümkün ancak kullanılan teknikler ve yaklaşımlar birbirinden büyük ölçüde farklı. Çoğu zaman birinin diğerine etkileri çok açık görünmüyor.

Sayfa kısıtından dolayı sadece temel teoriyi anlatabildik. En önemli eksiklerden biri grup cebirinden bahsetmemek oldu. Aslında grup cebirini bilmek bazı sonuçları daha kolay kanıtlamaya izin verir ancak diğer taraftan modüller teorisini de bilmeyi gerektirir. Ön bilgileri sınırlı tutmak amacıyla bu tercihi yaptık. Bu seçimin bir sonucu olarak modüller üzerindeki tensör çarpımından ve dolayısıyla

temsilleri altgruplardan gruplara çekmemizi sağlayan yöntemden de bahsetmedik.

Teorinin içinde yer alan ancak uygulamalarıyla birlikte kendi başına bir teori olan *simetrik grupların temsillerine* de yer veremedik. Simetrik grupların kombinatorik özellikleri, temsillerine de yansımıştır. Çok sayıda kombinatorik problem barındıran bu yön çatallanarak bir çok uygulamaya da izin vermektedir.

Yerimiz olmayan başka bir yön de cebirsel kapalı olmayan cisimler üzerindeki temsilleri incelemek oldu. Bu yönde ilerlemek için hem biraz sayılar teorisi hem de Galois'ın Teorisi'ne ihtiyaç olur.

Brauer'in geliştirdiği modüler temsillere de yer ayırmadık. Bu teori hem çok daha derine gidiyor hem de yoğun olarak modüller teorisi kullanıyor. Dergimizin formatına uygun bir sunum elde etmek mümkün görünmedi. Yine de belirtmeliyiz ki sonlu grup temsillerinde, günümüzde en çok ilgi çeken problemler bu teorisin altında yer almaktadır.



R. Brauer (10 Şubat 1901 – 17 Nisan 1977)

Son olarak aksiyomatik teoriden de bahsetmedik. Bu teori 1960'lardan bu yana hızla gelişimini sürdürmektedir. Kategori teorisi tekniklerini kullanıp bütün sonlu grupların bütün temsillerinin oluşturduğu devasa yapıyı ve bu yapının olası so-yutlamalarını çalışır. Soyut tekniklerle güçlendirildiği için diğer yöntemlerle elde edilemeyecek güçlü sonuçları ortaya çıkarmış ve çıkarmaya devam etmektedir. Günümüzde sonlu grupların temsilleri aksiyomatik teoriyle içiçe girmiştir.

## Kaynaklar

Yazı boyunca kullandığımız kaynakların listesini *Abel Grupları* yazımızın sonunda sunuyoruz. Yazıları "ders notu" gibi tasarladığımızdan atıfları toplu olarak vermeyi uygun bulduk: Yeni bir sonuç kanıtlamayacağız, sonuçlar klasik olup kaynaklarda yer alan kitapların her birinde ayrı ayrı ve daha derinlemesine bulunabilir.

**Teşekkürler.** Yazıların tamamını kısa sürede okuyup geliştirmek için katkıda bulunan Fatma Altunbulak Aksu'ya, Alp Eden'e, Ali Nesin'e ve Deniz Yılmaz'a teşekkür ederim.

## Grup Temsilleri:

## Temel Tanımlar ve Örnekler

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Giriş yazımızda grup temsillerini genel hatlarıyla tanıttık. Şimdi tanımları yapıp örnekleri verme zamanı geldi. Bu sayıdaki temsil yazıları boyunca  $G$  sonlu bir grup,  $\mathbb{C}$  karmaşık sayılar cismi,  $V$  sonlu boyutlu  $\mathbb{C}$ -vektör uzayı olacak.

$V$ 'nin bir  $G$ -temsili olması için gerekli şartı tanımlamıştık. Bu tanıma uygun olarak,

$$\rho : G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto g \cdot v$$

etkisi verilmiş olsun. Eğer  $G$ 'nin bir elemanını sabitlersek,  $g$  diyelim, bu etki bize,

$$\rho_g : V \rightarrow V, v \mapsto g \cdot v$$

ile göstereceğimiz bir fonksiyon verecek.

**Önsav 1.**  $\rho_g$  fonksiyonu  $V$ 'nin bir tersinir doğrusal dönüşümüdür.

*Kanıt.* Bir fonksiyonun doğrusal dönüşüm olması için hem abelyen grup dönüşümü olmalı, yani vektör toplama işlemini korumalı, hem de katsayı cisminin çarpmasıyla değişmeli olmalı. Her iki özellik de temsil tanımından kolayca elde edilir. Detayları okuyucuya bırakıyoruz.

$\rho_g$ 'nin tersinir olduğunu görebilmek için grup etkisinin birleşme özelliğini kullanıp,

$$\rho_{g^{-1}} \circ \rho_g = \rho_1 = \rho_g \circ \rho_{g^{-1}}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.  $\square$

Bu önsavla birlikte temsil teorisinin en temel gözlemlerinden birine ulaşılmış oluyoruz:

**Önerme 1.** Her  $G$ -temsili

$$\rho : G \times V \rightarrow V,$$

$G$ 'den  $V$ 'nin simetri grubuna bir grup dönüşümü verir. Bir başka ifadeyle,  $\rho$  aracılığıyla tanımlanan,

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow GL(V), \quad g \mapsto \rho_g$$

fonksiyonu bir grup dönüşümüdür. Benzer şekilde, her grup dönüşümü  $\sigma : G \rightarrow GL(V)$  de  $G$ 'nin  $V$  üzerinde bir temsili verir.

*Kanıt.* Bir  $G$ -temsili  $\rho$  verildiğinde  $\tilde{\rho}$ 'nin grup dönüşümü olacağı bariz:

$$\tilde{\rho}(gh)(v) = \rho_{gh}(v) = (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v) = (\rho_g \circ \rho_h)(v)$$

Diğer taraftan  $\sigma : G \rightarrow GL(V)$  verildiğinde  $G$ 'nin doğrusal etkisini,

$$g \cdot v := \sigma(g)(v)$$

olarak tanımlarız. Bu tanımın gerçekten doğrusal bir etki olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.  $\square$

**Örnek 1.** Hemen bir örnek yapalım! Grubumuz

$$G = C_3 = \{1, c, c^2\},$$

yani 3. mertebeden devirli grup olsun. Etki edeceğimiz uzayıysa karmaşık düzlem (yani  $V = \mathbb{C}^2$ ) seçelim. Temsil kurmak için  $C_3$ 'ün her elemanının  $V$  üzerindeki etkisini tarif etmemiz gerekiyor. Tarifini vereceğimiz temsile  $\rho$  diyelim.

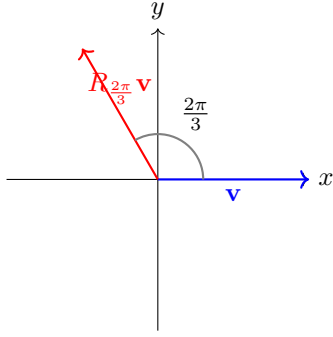
$$\rho : C_3 \rightarrow GL(V)$$

İlk olarak birim eleman 1 etkisiz olacak, yani her  $v \in V$  için  $\rho_1(v) = v$  olacak. Şimdi,  $\tilde{\rho}$  bir grup dönüşümü olduğundan  $c^2$ 'nin etkisi  $c$ 'yi iki kere uygulamayla bulunur. Öyleyse sadece  $c$ 'nin etkisini belirlemek yeterli. Son olarak,  $c^3 = 1$  olduğundan,  $\rho(c)$ 'yi 3 kere arka arkaya uygulamak birim elemanı uygulamaya denk olmalı, yani, her şeyi başa almalı.

Bunları göz önüne aldığımızda ilk akla gelen etki düzlemi orijin etrafında  $2\pi/3$  kadar (ya da  $120^\circ$  döndürmek olmalı. Bu döndürme işlemini  $R_{2\pi/3}$  ile gösterirsek,

$$\rho : c \mapsto R_{2\pi/3}$$

tanımlanmış oluruz.



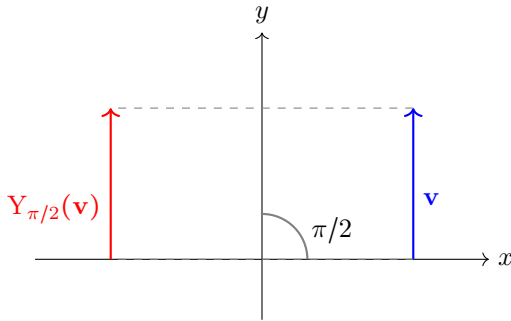
Peki başka bir etki var mı? Basit bir numara yapabiliriz:  $2\pi/3$  kadar değil de  $4\pi/3$  kadar döndürsek? O zaman yine bir etki buluruz ve yukarıdakinden farklı olur. Bu temsile  $\rho'$  diyelim:

$$\rho' : c \mapsto R_{4\pi/3}$$

Tatmin edici bir değişiklik olmasa da ikinci bir temsil bulmuş olduk. Aşağıda bu tür olası numaraları göz ardı etmemizi sağlayacak bir tanım yapacağız.

**Örnek 2.** Bir örnek daha yapalım. Bu kez  $G = C_2 = \{1, a\}$  olsun. Yukarıdaki adımları takip edersek  $a$ 'nın görüntüsünün mertebesi 2 olan bir etki olması gerektiğini görürüz. İlk akla gelen  $R_\pi$ , yani  $\pi$  kadar döndürme dönüşümüdür ve gerçekten de bize bir temsil verir. Bu dönüşümü yine  $\rho$  ile göstereceğiz.

Bir temsil daha bulabiliriz. Bunun için döndürmeler yerine yansımaları düşünebiliriz.  $Y_{\pi/2}$  ile  $y$ -eksenine göre yansıma dönüşümünü gösterelim. Bu durumda  $\gamma : C_2 \rightarrow GL(V)$  temsilini  $a \mapsto Y_{\pi/2}$  ile tanımlayabiliriz.



Yeni yöntemimiz gerçekten de yeni bir temsil vermiş gibi görünüyor. Örneğin  $\rho(a)$  altında orijin dışında sabit nokta bulunmazken  $\gamma(a)$  dönüşümü  $y$  ekseninin tamamını sabitlemektedir.

Okuyucu şimdi *Örnekler* yazımızdaki  $S_3$  ve  $D_8$  örneklerini de inceleyebilir. Alternatif olarak denk temsiller tanımını da bekleyebilirsiniz.

Bu sonuçla birlikte *temsil* kelimesi de anlam kazanmış oldu, çünkü soyut bir grup olan  $G$ 'nin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grubun soyut olması  $G$  kümesinin elemanlarını ve bu elemanların çarpma işlemini belirlemediğimiz anlamına gelir. Örneğin  $G = S_3$  yazarsak  $G$ 'nin elemanlarını ve grup işlemini somut olarak biliriz.

elemanlarını  $V$ 'nin doğrusal dönüşümleriyle ve soyut grup işlemini fonksiyon bileşkesiyle eşlemek yoluyla grubu bu yeni ortamda *temsil* etmiş olduk.

Doğrusal cebirden hatırlarsak, gündemdeki vektör uzaylarına baz belirlememiz durumunda, her doğrusal dönüşüm bir matris tarafından temsil edilebilir. Bu bilgiyi kullanıp grupları matris gruplarıyla da temsil edebiliriz. Bunun için,  $V$  uzayına bir baz seçelim,  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , öyle ki her  $v \in V$  için biricik,

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$$

yazımı mümkün olsun. Bu yazımda  $\lambda_j$ 'ler kompleks sayılar olup  $v$ 'nin  $\mathcal{B}$ -koordinatları olarak adlandırılırlar. Bu koordinatları sütun vektörü olarak depolarız.

$T : V \rightarrow V$  doğrusal dönüşümü verildiğinde  $T$ 'nin  $\mathcal{B}$  bazına göre olan matrisi şöyle bulunur: İlk olarak her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T(e_j)$  vektörü hesaplanır ve  $\mathcal{B}$ -koordinatları bulunur. Sütunları bu sütun vektörlerinden oluşan matrise  $T$ 'nin  $\mathcal{B}$ -matrisi denir ve  $[T]_{\mathcal{B}}$  ile gösterilir.

Matris bulma işlemi tersine çevrilebilir: Eğer bir matrisle yola çıkarsak sütunlarını baz elemanlarının görüntüleri olarak değerlendirip bir doğrusal dönüşüm tanımlayabiliriz.

Matris gösterimiyle birlikte,

$$GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$$

izomorfizması bulmuş oluruz.

Diğer taraftan,  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  temsili verildiğinde elde ettiğimiz matris gösterimini kullanıp,

$$\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

dönüşümünü de elde etmiş olduk. (Burada notasyonu basit tutmak için yeni bir harf kullanmadık.) Bu dönüşüme de  $G$ 'nin *matris temsili* diyoruz. Bir önceki durumda olduğu gibi, grubun elemanlarını matrislerle, grup çarpmasını ise matris çarpmasıyla *temsil* etmiş olduk.

**Örnek 3.** Yukarıdaki  $C_3$  örneğimize dönelim. Et-kimiz 2 boyutlu uzay üzerine olduğundan matris temsili  $\rho : C_3 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  biçiminde tanımlanmalı. Birim elemanın görüntüsü birim matris  $I_2$  iken  $\rho(c) = R_{2\pi/3}$ 'ün matrisini belirlemek için standart baz  $\{e_1, e_2\}$  üzerindeki etkisini bulmamız gerekir. Bu hesap doğrusal cebirin klasik örneklerinden olduğundan okuyucuya bırakıp sonucu vermekle yetineceğiz.

$$[\rho(c)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hatırlarsanız bir de  $\rho'$  tanımlamıştık. İçgüdüsel olarak bu iki temsil arasında büyük bir fark göremesek de etkilerin farklı olduğu da aşîkârdır. Matris temsili olarak değerlendirdiğimizde  $\rho'(c)$ 'nin matrisi şöyle verilir:

$$[\rho'(c)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matrislerin de birbirine çok benzediğini gözleyebiliriz.

## Denk Temsiller

Şimdi şu soruyu düşünelim:  $G$ 'nin iki temsilini ne zaman *denk* kabul edeceğiz? Tabii öncelikle *denk* kelimesine bir anlam vermemiz gerekli. Sezgisel olarak, denk olmanın eşit olmaktan daha zayıf olmasını bekleriz; çünkü aslında görüntünün eşitliğine değil yaratılan etkinin eşitliğine bakmak istiyoruz. Örneğin yukarıdaki  $C_3$  temsillerini denk kabul etmek isteriz!

Birbirinden *sunî* olarak farklılaştırılmış temsiller kurmak zor değildir. Aslında benzer bir durum doğrusal dönüşümler için de geçerlidir. Örneğin  $V$  vektör uzayı için iki farklı baz alırsak,  $\mathcal{B}$  ve  $\mathcal{D}$ ,  $T : V \rightarrow V$ 'nin  $\mathcal{B}$ 'ye ve  $\mathcal{D}$ 'ye göre matrisleri birbirinden farklı olacaktır. Ama  $V$  üzerindeki etki özünde birbirine denktir.

Bu denkliği temsiller için şöyle genelleriz.

$\rho : G \rightarrow GL(V)$  ve  $\sigma : G \rightarrow GL(V)$  temsilleri verilsin. Eğer her  $g \in G$  için,

$$\sigma(g) = T \cdot \rho(g) \cdot T^{-1}$$

eşitliğini sağlayan tersinir bir doğrusal dönüşüm  $T : V \rightarrow V$  varsa,  $\rho$  ve  $\sigma$ 'ya *denk temsiller* denir. bu durumda  $\rho \sim \sigma$  yazarız.

Tanımdan açıkça görüleceği gibi, temel olarak, iki temsilin farklı bazlarda aynı dönüşümleri belirlediğini söylüyoruz ancak bu baz değişimi grubun tüm elemanları için aynı anda gerçekleşmeli. Yani bulacağımız  $T : V \rightarrow V$  dönüşümü  $G$ 'nin tüm elemanları için işe yarmalıdır!

**Örnek 4.** Tanımımızdan ilk beklentimiz  $C_3$  temsillerinin denk olduğunu vermesiydi. Tanım beklentimizi karşılar:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi yukarıda verdiğimiz matrisleri birbirine dönüştürecektir!

**Örnek 5.** Örnekler yazımızda  $D_8$  grubu için verdiğimiz 2 boyutlu temsili hatırlatalım:

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Denk temsil bulmak için bir tersinir dönüşüme ihtiyacımız var:  $T : V \rightarrow V$ 'yi,

$$T(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot v$$

olarak tanımlayalım. Matrisin determinanı 0 olmadığından tersi vardır ve

$$T^{-1}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot v$$

olur. Tanımda verilen işlemi yapıp  $\sigma : D_8 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  temsilini bulabiliriz. Hesapların detaylarını okuyucuya bırakıyoruz.

$$\sigma(s) = T \cdot \rho(s) \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\sigma(t) = T \cdot \rho(t) \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$G$ 'nin bütün temsillerinin kümesini düşünürsek iki temsilin denk olması bu küme üzerinde bir bağıntı verir. İsminin de önerdiği üzere bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır, yani yansıma, simetri ve geçişlilik özelliklerine sahiptir. Bu iddianın kanıtını da okuyucuya bırakıyoruz. Bundan sonra temsillerden söz ederken temsillerin bu denklik bağıntısı altındaki denklik sınıflarından söz edeceğiz. Bir başka ifadeyle, birbirine denk olan temsilleri eşit kabul edeceğiz.

## Alt-temsiller

Üzerinde bir yapı olan matematiksel nesnelere düşünürken her zaman *altyapılar* olup olmadığını anlamaya çalışırız. Kümeler için altküme, gruplar için altgruplar vs. Burada nesnenin bir kısmının yapı altında kapalı olup olmadığı belirlenmelidir. Örneğin gruplar için, *altgrup* demek grup işlemi altında kapalı bir altküme demektir, yani verilen grup çarpması ile kendi başına grup olabilmelerini bekleriz.

Bu bakış açısıyla alt-temsilleri belirlemeye çalışalım. Vektör uzayı  $V$ 'nin  $G$ 'nin bir temsili olması  $G$ 'nin  $V$  üzerinde doğrusal etkisi olması demektir. Öyleyse  $G$ 'nin etkisi altında kapalı altuzaylara alt-temsil denilebilir.

$\rho : G \rightarrow GL(V)$  bir grup temsili ve  $W \subseteq V$  bir altuzay olsun. Eğer her  $g \in G$  ve her  $x \in W$  için  $\rho_g(x) \in W$  oluyorsa  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  dönüşümüne  $\rho$ 'nun  $W$  üzerindeki alt-temsili denir.

Burada dikkat edilmesi gereken farklı bir durum var! Her ne kadar temsil adını verdiğimiz nesne bir grup dönüşümü olsa da asıl ilgilimiz vektör uzayı olan  $V$  idi. Dolayısıyla alt-temsil dediğimiz zaman  $V$ 'nin altuzaylarını düşünüyoruz. Bu noktada okuyucuyu *Örnekler* yazımıza yönlendiriyorum.  $S_3$  grubunun alt-temsili de olan temsillerine bir örnek sizleri bekliyor.

Tabii yine aşikâr örneklerimiz var. Eğer  $W = \{0\}$  ya da  $W = V$  alırsak yukarıda verilen koşulun kolayca sağlandığını görürüz. Genel yaklaşımı takip ederek ilerlemeye devam edersek sıradaki görevimiz bu tür aşikâr alt-temsiller dışında alt-temsili olmayan temsilleri aramak olmalı.

Vektör uzayları için bu soru kolayca çözülür; çünkü sıfır olmayan her vektör 1 boyutlu bir altuzay üretmektedir. Dolayısıyla aşikâr olmayan hiçbir alt-uzayın var olmaması için gerek ve yeter koşul uzayın boyutunun 1 olmasıdır.

Temsiller söz konusu olduğunda tanımladığımız ek koşul daha yüksek boyutlarda da örnek bulmamızı sağlar. Bu tanımlı vermeden önce temsillere bakış açımızı değiştirecek bir kavram üreteceğiz.

### CG-modüller

Alt-temsilleri tanımlarken karşılaştığımız durum, yani temsil dediğimizde grup dönüşümünü değil vektör uzayını düşünme durumu, aslında tüm yapıyı vektör uzayları cinsinden tanımlamanın daha uygun olduğunu gösteriyor. Bu geçişi sağlamak ve grup dönüşümü tanımından uzaklaşmak için yeni bir tanım yapacağız.

$\rho : G \rightarrow GL(V)$  temsili verildiğinde  $(V, \rho)$  ikilisine bir *CG-modül* denir.  $V$ 'nin vektör uzayı boyutuna *CG-modülün boyutu* ya da *derecesi* denir.

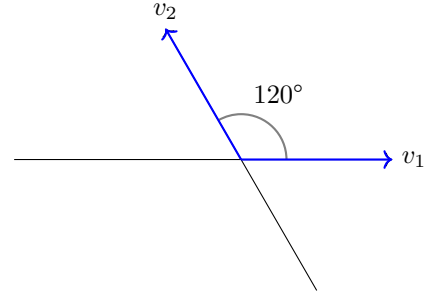
Bu her ne kadar açık bir tanım olsa da daha net bir tanım daha verelim:

$V$  vektör uzayı ve  $G$  grubu verilsin. Eğer  $V$  üzerinde  $G$ 'nin doğrusal bir etkisi varsa  $V$ 'ye *CG-modül* denir.

**Örnek 6.** Bakış açımızdaki değişimi daha net görebilmek için ilk örneğimize geri dönelim.  $G = C_3$  grubunun  $V = \mathbb{C}^2$  üzerindeki döndürme etkisini tanımlamıştık. Bunun için grubun üretici  $c$ 'yi orijin

etrafında  $2\pi/3$  dönme sağlayan doğrusal dönüşümle eşlemiştik.

Bize bu temsili *animsatan* bir  $\mathbb{C}C_3$ -modül bulmak için önce  $\mathbb{C}^2$  için bir baz belirleyelim. Döndürme etkisinin tarifini kolaylaştırmak için ilk baz elemanını  $x$ -ekseni doğrultusundaki birim vektör  $v_1$ , ikinci baz elemanınıysa merkezi bir köşesi  $x$ -ekseninde merkezi orijinde olan eşkenar üçgenin 2. bölgedeki köşesi yönündeki birim vektör olarak alalım. Aşağıda bu bazla verilen koordinat düzlemini bulabilirsiniz.



Şimdi grup etkisini tanımlayalım. Etkiyi önce baz üzerinde tanımlayıp sonra doğrusal olarak genişletirsek etkinin doğrusal olma özelliğini de elde etmiş oluruz.

$$c \cdot v_1 = v_2, \quad c \cdot v_2 = v_3$$

olsun. Burada  $v_3 = -(v_1 + v_2)$  üçgenin diğer köşesi yönündeki birim vektörü gösteriyor. Doğrusal olarak genişlettiğimizdeki etkiyle birlikte bir  $\mathbb{C}C_3$ -modül elde etmiş olacağız. Bu etkinin ilk örneğimizdeki temsilden gelen modülü ürettiği açıktır.

Böylece  $G$ 'nin temsilleriyle *CG-modülleri* birbir eşlemiş oluyoruz. Ama hatırlarsanız temsilleri denklik sınıflarıyla birlikte düşünmeye karar vermiştik. Dolayısıyla denklik bağıntımızı *CG-modüllere* de taşımamız gerekli. Kullanacağımız yöntem klasik: *CG-modül*, üzerinde yapı olan bir küme olduğu için denkliğin doğal tanımını, yapıyı koruyan birebir-örten fonksiyonlar, yani izomorfizmalar verecek!

$V$  ve  $W$  *CG-modüller* ve  $\phi : V \rightarrow W$  bir tersinir doğrusal dönüşüm olsun. Eğer her  $g \in G$  ve  $v \in V$  için,

$$\phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\phi$ 'ye *CG-izomorfizması* denir. Bu durumda  $V \cong W$  yazarız.

Bu tanımlı değişmeli bir diyagram üzerinde görebiliriz:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array}$$

Diyagramda sol üstteki  $V$ 'den sağ alttaki  $W$ 'ya giden iki farklı yol var ve diyagramın değişmeli olması bu iki yoldan da gidildiğinde aynı sonuca ulaşacağı anlamına gelmektedir.

**Teorem 1.**  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  ve  $\sigma : G \rightarrow GL(W)$  temsilleri için aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

1.  $\rho$  ve  $\sigma$  temsilleri denktir.
2.  $CG$ -modüller  $V$  ve  $W$  izomorftur.

Bu teoremle birlikte  $G$ 'nin temsilleriyle  $CG$ -modülleri eşleyen fonksiyonun temsillerin denklik sınıflarını da  $CG$ -modüllerin izomorfizma sınıflarına eşlediğini görmüş olduk. Bundan sonra sadece  $CG$ -modülleri düşüneceğiz, çok gerektiğinde yukarıda tarif edilen geçişle oluşan temsillere de atıfta bulunacağız.

Bir diğer önemli not: Her ne kadar izomorfik olmak eşit olmak anlamına gelmese de sınıflandırma ve yapı belirleme problemlerinde tüm modülleri izomorfizma sınıflarına göre alıyoruz. Demek istediğim, birbirine izomorfik modülleri, gerektiğinde  $\cong$  işaretini de kullanarak, aynı kabul edeceğiz. İngilizcede *up to isomorphism* diyoruz.

Bu yazılarımızda üzerinde durmayacak olsak da aslında bu ismin bir temeli var. Cisimler, halkalar gibi cebirsel bir yapı olan *cisimler üzerindeki cebirler*, üzerinde halka yapısı olan vektör uzaylarıdır. Cebirlerin vektör uzaylarına etkileri de çalışılabilir ve *cebirin modülleri* dediğimiz bu yapılar, cebir  $CG$  seçildiğinde yukarıda tanımladığımız yapılarla karşılık geleceklerdir.

Alt-modülleri bu yeni dilde tanımlayabiliriz. Ayrıca altmodülü olmama durumuna da bir isim vereceğiz.

$V$  bir  $CG$ -modül ve  $W \subseteq V$  bir altuzay olsun. Eğer her  $g \in G$  ve  $w \in W$  için  $g \cdot w \in W$  sağlanıyorsa  $W$ 'ya  $V$ 'nin bir  $CG$ -altmodülü denir.

Eğer  $V$ 'nin  $0$  ve  $V$ 'den başka bir altmodülü yoksa  $V$ 'ye *indirgenemez modül* ya da *basit modül*, aksi halde *indirgenebilir modül* ya da *basit olmayan modül* denir.

Basit modüller üzerinde çok sayıda sonuç vereceğiz. Temel amaçlarımızdan birisi tüm basit modülleri bulmak. Önce temel iki örneğe göz atalım.

**Örnek 7.** (a) 1 boyutlu her  $CG$ -modül basittir.

(b) *Örnekler* bölümünde  $S_3$  grubu için bir basit bir de basit olmayan  $CS_3$ -modül örneği bulunuyor.

## $CG$ -homomorfizmaları

Matematiksel nesnelere çalışırken kullandığımız yöntemlerden birisi de yapıyı koruyan fonksiyonlar aracılığıyla söz konusu nesnelere karşılaştırmaktır.  $CG$ -modüller için bu kavram aşağıdaki gibi verilir.

$V, W$  birer  $CG$ -modül ve  $f : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. Eğer her  $g \in G$  ve  $v \in V$  için,

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $f$ 'ye  *$CG$ -modül homomorfizması* denir.

Beklendiği üzere, bu tanım yukarıda verdiğimiz izomorfizma tanımının bir genellemesidir. Homomorfizmaları alt-modüller üretmek için kullanabiliriz.  $f : V \rightarrow W$  bir  $CG$ -modül homomorfizmasıysa  $f$ 'nin çekirdeği (İng. kernel),

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Eğer  $f(v) = 0$  ise her  $g \in G$  için,

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v) = g \cdot 0 = 0$$

olacağından  $g \cdot v \in \ker(f)$  olur, yani  $f$ 'nin çekirdeği bir  $CG$ -altmodüldür. Benzer şekilde  $f$ 'nin görüntüsü de bir  $CG$ -altmodül olur. Gerçekten de  $w = f(v)$  ve  $g \in G$  ise,

$$g \cdot w = g \cdot f(v) = f(g \cdot v)$$

sağlandığından  $g \cdot w$  da  $f$ 'nin görüntüsündedir. Bu sonuçları özetleyelim.

**Önerme 2.**  $f : V \rightarrow W$   $CG$ -modül homomorfizmasıysa  $f$ 'nin çekirdeği  $V$ 'nin,  $f$ 'nin görüntüsüysa  $W$ 'nin birer  $CG$ -altmodüldür.

Yine aşikâr örnekler mevcut! Eğer  $f$ 'yi  $V$ 'nin bütün elemanlarını  $0$ 'a götüren fonksiyon olarak seçersek  $f$ 'nin  $CG$ -homomorfizması olacağı açıktır. Benzer şekilde  $f : V \rightarrow V, v \mapsto v$  birim fonksiyonu da  $CG$ -homomorfizmasıdır. Daha iyi bir örnek aşağıda.

**Örnek 8.** Örnekler yazımızda  $S_3$  grubunun standart temsilini tanıtmıştık. Oradaki gösterimlerle devam edelim. Bu temsile karşılık gelen  $\mathbb{C}G$ -modülü de  $U$  ile gösterelim. Ayrıca  $\mathbb{C}$  ile 1 boyutlu aşikâr  $\mathbb{C}S_3$ -modülü gösterelim. Bu modül  $1 \in \mathbb{C}$  tarafından gerilir. Şimdi  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow U, 1 \mapsto f_1 + f_2 + f_3$  tanımını yapalım. Kolayca,

$$\phi(g \cdot 1) = \phi(1) = f_1 + f_2 + f_3$$

ve

$$g \cdot f(1) = g \cdot (f_1 + f_2 + f_3) = f_1 + f_2 + f_3$$

olduğunu hesaplarız. Yani  $\phi$  bir  $\mathbb{C}G$ -homomorfizmasıdır.

Ters yönde,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

kuralıyla tanımlayacağımız  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu da bir  $\mathbb{C}G$ -homomorfizması olur. Gerçekten de  $G$  etkisi sadece  $f_i$ 'leri karıştırdığı için etki sonrası katsayıların toplamı sabit kalacaktır.

Bu homomorfizmanın çekirdeğini de belirleyebiliriz:  $\psi$  her vektörü koordinatları toplamına götürüyor, dolayısıyla çekirdeği koordinatları toplamı 0 olan düzlem olmalı. Bu düzlemi  $K$  ile gösterelim:

$$K = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

Yukarıda da belirttiğimiz gibi  $K$  altuzayı  $U$ 'dan gelen etkiyle bir  $\mathbb{C}S_3$ -modül olur.

**Gösterim.**  $V, W$  birer  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$$

ile  $V$ 'den  $W$ 'ya giden tüm  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizmalarının kümesini göstereceğiz. Bu küme,

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$$

ile verilen toplama işlemi altında abel grubu olur.

Eğer  $W = V$  ise,

$$\text{End}_{\mathbb{C}G}(V) := \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V)$$

yazarız ve her bir elemana  $\mathbb{C}G$ -endomorfizması deriz.

## Dolaysız Toplam ve Bölüm Modülleri

Sıklıkla kullanacağımız iki kavram daha var. İlk olarak dolaysız toplamı tanımlayalım. Bu amaçla  $V$  ve  $W$  ile göstereceğimiz iki  $\mathbb{C}G$ -modül seçelim.

Bu modülleri vektör uzayı olarak düşündüğümüzde dolaysız toplamlarını yapabiliriz:

$$V \oplus W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

Şimdi bu vektör uzayını bir  $\mathbb{C}G$ -modül yapmak kolay: Her  $g \in G$  ve  $(v, w) \in V \oplus W$  için,

$$g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$$

yazarız. Tanımın gerçekten bir  $\mathbb{C}G$ -modül verdiğini kanıtlamayı okuyucuya bırakıyoruz. Bu yolla elde ettiğimiz  $\mathbb{C}G$ -modül  $V \oplus W$ 'ya  $V$  ile  $W$ 'nin dolaysız toplamı denir. Dikkat edilirse,

$$\dim_{\mathbb{C}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{C}} V + \dim_{\mathbb{C}} W$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Her ne kadar ilk bakışta kullanışlı görünmese de dolaysız toplamlar temsil teorisinde önemli bir yere sahiptir. İlerleyen sayfalarda daha yoğun kullanımını göreceğiz.

Dolaysız toplamı verilen bir modülün içinde de yapabiliriz. Bunun için  $U$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $V, W \subseteq U$  altmodüller olsun. Bu iki altmodülün toplamı

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

tanımıyla verilir. Sözlü olarak, elimizdeki iki vektör uzayının tüm elemanlarının toplamlarından oluşan uzayı aldık. Tanımımızın gerçekten bir altmodül olduğunu okuyucu kontrol etmeli. Doğrusal cebirden iyi bildiğimiz bu işlem sonucunda elde edilen altuzayın boyutu,

$$\dim_{\mathbb{C}}(V \oplus W) = \dim_{\mathbb{C}} V + \dim_{\mathbb{C}} W - \dim_{\mathbb{C}}(V \cap W)$$

eşitliğiyle verilmektedir.

Eğer  $V \cap W = 0$  ise, toplam altmodülü  $V + W$ 'ya dolaysız toplam diyeceğiz. Yukarıdaki dolaysız toplamla bu yeni tanımın ilişkisi aşağıdaki sonuçla belirleniyor: Öncelikle  $V, W \subseteq U$  verildiğinde bu iki altmodülü bağımsız altmodüller olarak düşünüp dolaysız toplamları  $V \oplus W$  modülünü kurabiliriz.

**Önerme 3.**  $\mathbb{C}G$ -modül  $U$  ve altmodülleri  $V, W \subseteq U$  verildiğinde,

$$T : V \oplus W \rightarrow V + W, \quad (v, w) \mapsto v + w$$

fonksiyonu bir doğrusal dönüşüm tanımlar. Dahası  $V \cap W = 0$  olduğunda  $T$  bir izomorfizma olur.

Doğrusal cebirden aşına olduğumuz kanıtı tamamlamayı bir kez daha okuyucuya bırakıyoruz.

Bir diğer tanımımız bölüm modülleri olacak. Bunun için  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $W \subseteq V$  bir  $\mathbb{C}G$ -altmodül olsun. Yine vektör uzayları olarak aldığımızda,

$$V/W = \{v + W \mid v \in V\}$$

bölüm uzayından söz edebiliriz. Burada,

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}$$

ile  $v$ 'nin  $W$ -eşkümesini göstermekteyiz. Yukarıda olduğu gibi bu bölüm uzayını  $CG$ -modül yapmak mümkün. Bekleneceği gibi  $g \in G$ 'nin etkisini,

$$g \cdot (v + W) = g \cdot v + W$$

olarak tanımlarız. Bu tanımın düzgün olduğunu kanıtlamak gereklidir. Bu amaçla  $v + W = v' + W$  olsun. Öyleyse,

$$g \cdot (v + W) = g \cdot (v' + W)$$

sağlanmalı. Ama  $v + W = v' + W$  eşitliği  $v - v' \in W$  içermesini de gerektirir. Ayrıca  $W$  bir  $CG$ -modül olduğundan  $g \cdot (v - v') \in W$  da doğrudur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g \cdot (v' + W) &= g \cdot v' + W \\ &= g \cdot v' + g \cdot (v - v') + W \\ &= g \cdot v' + g \cdot v - g \cdot v' + W \\ &= g \cdot v + W \\ &= g \cdot (v + W) \end{aligned}$$

eşitlikleri etkinin düzgün tanımlı olduğunu verir. Oluşturduğumuz  $V/W$  modülüne  $V$ 'nin  $W$ 'ya bölümü denir.

Çekirdek ve bölüm tanımlandıktan sonra tüm cebircilerin aklına izomorfizma teoremleri gelecektir. İyi haber şu ki bu teoremler  $CG$ -modüller için de doğrudur! Şimdilik sadece birinci teoremi vereceğiz. Diğerlerini hem ilkinden çıkarılabilecekleri hem de onun kadar sık kullanılmayacakları için şimdilik vermeyeceğiz.

**Teorem 2** (Birinci İzomorfizma Teoremi).

$\varphi : V \rightarrow W$  bir  $CG$ -modül homomorfizması olsun.  $\varphi$ 'den türeyen ve

$$\tilde{\varphi}(v + \ker \varphi) = \phi(v)$$

ile tanımlanan,

$$\tilde{\varphi} : V / \ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$$

fonksiyonu bir  $CG$ -modül izomorfizmasıdır.

*Kanıt.* Öncelikle  $\tilde{\varphi}$ 'nin düzgün tanımlı olduğunu görelim. Eğer  $v + \ker \varphi = v' + \ker \varphi$  ise, yani  $v - v' \in \ker \varphi$  ise,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(v + \ker \varphi) &= \varphi(v) = \varphi(v + (v' - v)) \\ &= \varphi(v') = \tilde{\varphi}(v' + \ker \varphi) \end{aligned}$$

olduğundan  $\tilde{\varphi}$  fonksiyonu  $\ker \phi$ 'nin eşkümelerinde sabittir. Dolayısıyla eşküme temsilcileri üzerinden yapılan tanım düzgündür. Kanıtın bu kısmında sadece  $\varphi$ 'nin doğrusal olduğunu kullandığımıza dikkat edin. Benzer şekilde  $\tilde{\varphi}$ 'nin de doğrusal olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

İkinci olarak  $\tilde{\varphi}$ 'nin  $CG$ -homomorfizması olduğunu göstermeliyiz. Bunun için  $g \in G$  verilsin. O zaman,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g \cdot (v + \ker \varphi)) &= \varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v) \\ &= g \cdot \tilde{\varphi}(v + \ker \varphi) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanacağından  $\tilde{\varphi}$ 'nin  $CG$ -homomorfizması olduğu sonucuna ulaşırız. Bu kısımdaysa  $\varphi$ 'nin  $CG$ -homomorfizması olduğu önem taşımaktaydı.

Son olarak  $\tilde{\varphi}$ 'nin birebir ve örten olduğunu kanıtlamalıyız. Öncelikle, örten olduğu aşikâr; çünkü  $\varphi(v) = \tilde{\varphi}(v + \ker \varphi)$  sağlanır. Birebir olduğunu görmek için  $\tilde{\varphi}(v + \ker \varphi) = \tilde{\varphi}(v' + \ker \varphi)$  olduğunu varsayalım. Sağı soldan çıkarırsak,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\varphi}(v + \ker \varphi) - \tilde{\varphi}(v' + \ker \varphi) \\ &= \varphi(v) - \varphi(v') = \varphi(v - v') \end{aligned}$$

buluruz. Öyleyse  $v - v' \in \ker \varphi$  olur, yani  $v + \ker \varphi = v' + \ker \varphi$  sağlanır.  $\square$

**Örnek 9.** Örnek 8'de tanımladığımız  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$  homomorfizması, görüntü kümesi 1 boyutlu olduğundan, örtendir. Bu durumda Birinci İzomorfizma Teoremi'nden,

$$U / \ker \psi \cong \mathbb{C}$$

buluruz.

## Basit Modüller ve Tam İndirgenebilirlik

Yukarıda basit modülleri tanımlamıştık. Doğal olarak bu modüllerin tüm diğer modüllerin yapı taşları olmasını bekliyoruz. Vektör uzayları örneğimizi dolaysız toplam tanımımızla birlikte tekrar düşünürseniz, herhangi bir vektör uzayının basit vektör uzaylarının doalysız toplamı olarak yazılabileceği sonucuna varırız. Benzer bir sonucu  $CG$ -modüller için de kanıtlamak mümkün! Ancak durumu tam olarak netleştirebilmek için benzer sonucun karakteristiği  $p > 0$  olan cisimlerin vektör uzayları üzerindeki etkiler için kanıtlamanın her zaman mümkün olmadığını belirtelim. Bu sebepten dolayı aşağıdaki tanımı yapmak gereklidir.

$V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olmak üzere, eğer  $V$ 'nin bazı basit  $\mathbb{C}G$ -altmodülleri  $V_1, V_2, \dots, V_n$  için,

$$V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

izomorfizması sağlamıyorsa  $V$ 'ye *tam indirgenebilir* ya da *yarı-basit* denir.

Bu tanıma göre tüm basit modüllerin aynı zamanda yarı-basit olacağı açık. Yarı-basit olmayan bir örneği *Örnekler* yazımızda bulabilirsiniz. Tekrar belirtelim, bu örnek için karakteristiği  $p > 0$  olan cisimler üzerindeki vektör uzaylarını bilmek gerekli. Tartışmamızın bir sonucu da indirgenebilir olmanın yeterince kapsamlı bir tanım olmadığıdır. İndirgenebilir olan, ama tam indirgenemeyen modüller kapsam dışında kaldı. Yeni bir tanım daha yapalım.

$V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun. Eğer  $V$ 'nin,

$$V = U \oplus W$$

olacak şekilde sıfırdan farklı  $U, W$  altmodülleri varsa  $V$ 'ye *parçalanabilir modül*, yoksa *parçalanamaz modül* diyeceğiz.

Önceki tanımla karşılaştırsak, basit olan her modül aynı zamanda parçalanamaz olacak; çünkü  $U$  ve  $W$  modülleri için adayımız bile yok. Benzer şekilde tam indirgenebilir her modül parçalanabilir. Ancak bu önermelerin tersleri doğru değil. Yukarıda bahsettiğimiz örnek bu durum için de aksi örnektir.

Sıradaki yazımızda tam indirgenebilirlik durumunu detaylı inceleyeceğiz. Öncesinde yarı-basit modüllerin temel özelliklerine kısaca göz atalım.

**Önsav 2.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1.  $V$  yarı-basittir.
2.  $V$  basit altmodüllerinin toplamı olarak yazılabilir.
3.  $V$ 'nin her altmodülünün bir tümleyeni vardır.

*Kanıt.* Birinci ve üçüncü önermelerin denliğini

yukarıda kanıtlamıştık. Öyleyse  $1 \implies 2$  ve  $2 \implies 1$  kanıtlanamaz yeterli olacaktır. İlk önerme, yani  $1 \implies 2$  önermesi açık, yukarıda gördüğümüz gibi,  $V$  basit modüllerin dolaysız toplamı olduğundan aynı zamanda bu modüllerin toplamı da olacaktır.

Geriyeye en zor önerme olan  $2 \implies 1$  önermesi kaldı. Diyelim ki  $V = \sum_{i=1}^k V_i$  basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin toplamı olarak yazılmış olsun. Burada  $k$ 'nin sonsuz olmasına da izin veriyoruz. Vektör uzayı  $V$ 'nin boyutu sonlu olduğundan bu toplamın içinden aynı eşitliği verecek sonlu sayıda terim seçebiliriz. Öyleyse, bu toplamın içinden dolaysız toplam olarak yazılabilecek en büyük terim kümesini alalım, yani öyle  $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_l}$  seçelim ki  $E := V_{i_1} + \dots + V_{i_l}$  dolaysız toplam olsun. İddiamız bu toplamın da  $V$  modülüne eşit olacağı. Gerçekten de eğer değilse, o zaman  $V_i \not\subseteq E$  sağlayan en az bir  $V_i$  vardır. Ama  $V_i$  basitti, dolayısıyla, bu durumda  $E \cap V_i = 0$  olmalıdır. Bu eşitlik bize  $E + V_i$  toplamının da dolaysız olduğunu verir ki bu sonuç  $E$  toplamının maksimal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla  $V_i$  özelliğine sahip bir altmodül yoktur, yani  $E = V$  sağlanır.  $\square$

**Önsav 3.**  $V$  yarı-basit bir  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $W \subseteq V$  bir  $\mathbb{C}G$ -altmodül olsun. Bu durumda  $W$  da yarı-basittir.

*Kanıt.* İlk olarak  $V$ 'nin bazı basit altmodülleri  $V_1, V_2, \dots, V_n$  için,

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

yazalım. Şimdi  $W = V \cap W$  olacağından,

$$W = (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) + \dots + (V_n \cap W)$$

eşitliğini elde ederiz. Ancak  $V_i$  altmodülleri basit olduğundan ve  $0 \subseteq V_i \cap W \subseteq V_i$  içermelerinden dolayı bu kesişimler ya 0 ya da  $V_i$ 'nin kendisine eşit olur. Dolayısıyla yukarıdaki toplamda 0 olan terimleri sildiğimizde geriye basit modüllerin toplamı kalır ki bu toplamın varlığı bize  $W$ 'nin yarı-basit olduğunu veriyor.  $\square$

Aşağıdaki önermenin kanıtı oldukça kolay. Bunu okuyucuya bırakıyoruz.

**Önsav 4.**  $V, V'$  yarı-basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerse  $V \oplus V'$  dolaysız toplamı da yarı-basittir.

# Grup Temsilleri: Maschke ve Schur Teoremleri

Olcaý Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Bir önceki yazımızda  $CG$ -modüllerin yarı-basit olduğunu iddia etmiştik. Aşağıda Maschke'nin Teoremi olarak vereceğimiz bu sonucun kanıtı hem temsil kuramında hem de yakın birçok alanda sıklıkla kullandığımız bir fikri de bizlere tanıtmış olacak.

**Teorem 1** (Maschke'nin Teoremi).  $U$  bir  $CG$ -modül olsun. Her  $CG$ -altmodül  $V \subseteq U$  için,

$$U = V \oplus W$$

eşitliğini sağlayan bir  $W \subseteq U$   $CG$ -altmodülü vardır.

Kanıtı geçmeden önce önemli bir notumuz var. Her ne kadar kompleks vektör uzaylarını çalışıyor olsak da herhangi bir cisim üzerindeki vektör uzaylarına etkileri de düşünebileceğimizi belirtmiştik. Maschke'nin Teoremi'nin en genel hali, cismin karakteristiği  $p$  olduğunda grubun mertebesi  $|G|$ 'nin  $p$ 'ye bölünmemesi varsayımını yapar ve aynı sonucu kanıtlar. Geri kalan durumda  $G$ 'nin temsilleri yarı-basit değildir.

*Kanıt.* İlk olarak  $V$ 'nin vektör uzayı olarak tümleyenini olan bir  $W_0 \subseteq U$  seçelim, yani  $U = V \oplus W_0$  olsun. Bu altuzay bir  $CG$ -altmodül olmak zorunda değildir. Yapmamız gereken  $W_0$ 'ı değiştirerek  $CG$ -altmodül de olan bir tümleyen bulmak olacak. Yukarıda verdiğimiz dolaysız toplama göre verilen  $V$  altuzayına izdüşüm fonksiyonunu  $\pi_V$  ile gösterebiliriz. Bir başka ifadeyle, eğer elemanları  $v + w, v \in V, w \in W$  olacak biçimde yazarsak,

$$\pi_V : U \rightarrow V, \quad v + w \mapsto v$$

elde ederiz.

Bu fonksiyon bir doğrusal dönüşüm olsa da  $CG$ -homomorfizma olmak zorunda değildir. Bir  $CG$ -homomorfizma elde etmek için  $\pi_V$ 'nin  $G$ -etkisi altındaki ortalamasını alırız, yani

$$\pi'_V : U \rightarrow U, \quad \pi'_V(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \pi_V(g \cdot u)$$

<sup>1</sup>Burada atıfta bulunduğumuz teorem herhangi bir doğrusal operatör  $T : V \rightarrow V$  için  $V \cong \ker T \oplus \text{Im } T$  olduğunu söyler. Dikkat ederseniz buradaki asıl iddia, yeni tanımımızla, tüm vektör uzaylarının yarı-basit olduğudur.

yazalım.

**İddia.** Yukarıda tanımladığımız  $\pi'_V$ ,

1.  $V$ 'ye izdüşümdür ve
2.  $CG$ -modül homomorfizmasıdır.

Bu iddiayı kanıtlamadan önce teoremin kanıtı için yeterli olduğunu gösterebiliriz. Bir önceki bölümde her  $CG$ -modül homomorfizmasının çekirdeğinin bir  $CG$ -altmodül olduğunu göstermiştik. Öyleyse  $\ker \pi'_V$ 'nin  $U$ 'nun bir  $CG$ -altmodülü olduğu söylenebilir. Ancak lineer cebirin iyi bilinen bir teoremi,<sup>1</sup>  $\ker \pi'_V$ 'nin  $V$ 'nin tümleyenini olduğunu vermektedir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Geriye sadece iddiayı kanıtlamak kaldı. İlk olarak  $\pi'_V$ 'nin görüntüsünü hesaplayalım. Her  $u \in U$  ve  $g \in G$  için  $\pi_V(g \cdot u) \in V$  olduğu açıktır. Ayrıca  $V$  bir  $CG$ -altmodül olduğundan  $G$  etkisi altında kapalıdır, özel olarak,  $g^{-1} \cdot \pi_V(g \cdot u) \in V$  sağlanır. Son olarak  $V$  bir altuzay olduğundan  $g^{-1} \cdot \pi_V(g \cdot u)$  elemanlarını  $g$  üzerinden topladığımızda da  $V$ 'nin içinde kalacaktır. Dolayısıyla  $\text{Im}(\pi'_V) \subseteq V$  olur.

Amacımız  $\pi'_V$ 'nin izdüşüm olduğunu göstermektir. Bunun için  $V$ 'nin elemanları üzerinde birim fonksiyon olduğunu da göstermeliyiz. Eğer  $v \in V$  ise,

$$\begin{aligned} \pi'_V(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \pi_V(g \cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (g \cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v \\ &= v. \end{aligned}$$

Buradaki hesapta, ikinci satıra inerken  $\pi_V$ 'nin  $V$ 'ye izdüşüm verdiğini ve  $V$ 'nin  $CG$ -altmodül yapısına sahip olduğunu kullandık. Sonraki iki satırdaki işlemler okuyucunun kolaylıkla takip edebileceği nitelikte.

Böylece geriye sadece  $\pi'_V$  fonksiyonunun bir  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması olduğunu göstermek kaldı. Bu amaçla  $x \in G$  ve  $u \in U$  seçelim ve aşağıdaki hesapları yapalım. Takibi kolaylaştırmak amacıyla her adımdaki değişimlerin altını çiziceğiz. Bu çizginin başka bir anlamı olmayacak.

$$\begin{aligned}
\pi'_V(x \cdot u) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \pi_V(g \cdot (x \cdot u)) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \pi_V(\underline{(gx)} \cdot u) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\underline{xx^{-1}}g^{-1}) \cdot \pi_V(\underline{(gx)} \cdot u) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underline{x} \cdot (\underline{(gx)^{-1}}) \cdot \pi_V(\underline{(gx)} \cdot u) \\
&= \underline{x} \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\underline{(gx)^{-1}}) \cdot \pi_V(\underline{(gx)} \cdot u) \\
&= x \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{\underline{y} \in G} (\underline{y}^{-1}) \cdot \pi_V(\underline{y} \cdot u) \\
&= x \cdot \pi'_V(u).
\end{aligned}$$

Bu paragrafta adımları açıklayacağız. Kendisi takip edebilen okuyucu kanıtın sonuna atlayabilir. İlk adım kolay, grup etkisinin birleşme özelliğini kullanıp  $g$  ve  $x$  etkilerini birleştirdik. Amacımız  $x$  etkisini başa almak olduğundan, tüm eşitliği soldan  $xx^{-1}$  ile çarptık. Bu arada yeni başlayanlar için birim elemanla çarpmanın cebircilerin en popüler taktiklerinden biri olduğunu belirtmeliyim. Sonraki adımda bu çarpımı birleşme özelliğini de kullanıp ayırdık,  $x$  yalnız kalırken  $x^{-1}$  ile  $g^{-1}$  birleşti. Böylece  $x$ 'i dilediğimiz gibi sol başa alabildik, bu arada  $x^{-1}g^{-1}$ 'i de  $(gx)^{-1}$  yaptık. Şimdi en önemli adım:  $\pi_V$ 'nin solundaki grup elemanı  $u$ 'nun önündeki grup elemanı birbirinin tersi. Aynı  $\pi'_V$ 'nin tanımında olduğu gibi! Ayrıca  $g$  değişkeni  $G$ 'nin bütün elemanlarını dolaşırken sabit  $x$  ile çarptığımız  $gx$  değişkeni de aynı elemanları dolaşır. Bu sebepten  $y = gx$  yazdığımızda toplamı  $y$  üzerinden yapmamızda bir sakınca olmaz. En sonda, belki, toplamdaki terimlerin yeri değişmiş olur. Değişken değiştirme taktiğini de uyguladıktan sonra sonuca ulaşmış olduk. Maschke kanıtlandı!  $\square$

İlerlemeden önce kanıtta kullandığımız değişken değiştirme taktiğini ayrıntılandırılm. Aynı fikri defalarca kullanacağız. Diyelim ki

$$\sum_{g \in G} \alpha(g)$$

toplamını hesaplıyoruz. Bu toplamda her grup elemanı için bir terim bulunuyor. Eğer

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

yazsaydık, yukarıdaki toplam,

$$\alpha(g_1) + \alpha(g_2) + \dots + \alpha(g_n)$$

olurdu. Bunun yerine  $x \in G$ 'yi sabitleyip  $\alpha(xg)$ 'leri toplayabiliriz:

$$\alpha(xg_1) + \alpha(xg_2) + \dots + \alpha(xg_n)$$

İddiamız bu iki toplamın birbirine eşit olduğudur. Bunu görmek için  $x$ 'le soldan çarpma fonksiyonu  $l_x : G \rightarrow G$ 'nin birebir ve örten olduğunu bilmek yeterli. Gerçekten, eğer bu doğruysa,

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} = G = \{xg_1, xg_2, \dots, xg_n\}$$

olacağı için tek yaptığımız terimleri yeniden sıralamak olacaktır. Şimdi,  $l_x$ 'in birebir ve örten olduğunu görmeliyiz, ama bu da kolay; çünkü  $x^{-1}$ 'le soldan çarpma fonksiyonu  $l_{x^{-1}}$  yukarıdaki fonksiyonun tersidir!

Maschke'nin Teoremi aynı zamanda yarı-basitliliği de kanıtlamaktadır. Şöyle ki  $V$  boyutu  $n$  olan bir  $\mathbb{C}G$ -modül ise öncelikle  $V$ 'nin basit olup olmadığına bakarız. Basitse zaten kanıtlayacak birşey yok. Değilse  $V$ 'nin 0 olmayan en az bir öz-altmodülü vardır, bir tanesine  $U$  diyelim. Şimdi Maschke'nin Teoremi'nden  $V = U \oplus W$  olacak şekilde başka bir altmodül  $W$  bulabiliriz. Bu altmodüller de basit olmak zorunda değil, ama her ikisi de sıfırdan büyük olduğu için boyutları en çok  $n-1$  olabilir. Şimdi tümevarım kullanarak hem  $U$ 'nun hem de  $W$ 'nin yarı-basit olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla  $V$  de yarı-basittir. Öyleyse şu sonucu kanıtladık:

**Sonuç 1.** *Tüm  $\mathbb{C}G$ -modüller yarı-basittir.*

Maschke'nin Teoremi'nin bir de iç çarpım uzaylarını kullanan kanıtı bulunmaktadır. Bu kanıtta da benzer bir fikir bulunuyor; iddiayı  $G$ -etkisi altında sabit kalan bir iç çarpımın varlığına indirgeyip bu iç çarpımı da herhangi bir iç çarpımın  $G$  etkisi altındaki ortalamasını alarak buluyoruz.

Teoremin bir diğer önemli sonucu da basit modüllerin önemini net olarak ortaya koymasındır: Tüm  $\mathbb{C}G$ -modüller basit olanların dolaysız toplamı olarak bulunur. Öyleyse sıradaki amacımızı basit modüller hakkında daha fazla bilgi toplamak olarak belirleyebiliriz.

**Sonuç 2.** *Her basit  $\mathbb{C}G$ -modül, düzenli  $\mathbb{C}G$ -modül  $\mathbb{C}G$ 'nin bir altmodülüne izomorftur.*

Bu sonuçta adı geçen *düzenli  $\mathbb{C}G$ -modül* yapısını *Örnekler* yazımızda bulabilirsiniz.

*Kanıt.* Sık kullanılan bir başka yöntemi ilk defa bu kanıtta göreceğiz.  $V$  basit  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $0 \neq v \in V$  olsun. Düzenli modül  $\mathbb{C}G$ 'den çıkan,

$$l_v : \mathbb{C}G \rightarrow V, \quad r \mapsto r \cdot v$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradaki etki daha açık olarak,

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \quad \text{iken} \quad \left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g (g \cdot v)$$

olarak tanımlanır. İlk iddiamız bu fonksiyonun bir  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması olduğu. Gerçekten de eğer  $g \in G$  ise,

$$l_v(g \cdot r) = (g \cdot r) \cdot v = g \cdot (r \cdot v) = g \cdot l_v(r)$$

sağlanır.

Diğer taraftan,  $l_v(1) = 1 \cdot v = v \neq 0$  olduğundan  $l_v$ 'nin görüntüsü sıfırdan büyüktür. Öyleyse,  $l_v$ 'nin görüntüsü bir altmodül olduğu ve  $V$  basit olduğu için  $l_v$  örten olmalıdır.

Bir diğer taraftan,  $l_v$ 'nin çekirdeği  $\ker l_v$  de  $\mathbb{C}G$ 'nin altmodülüdür. Maschke'nin Teoremi'nden,

$$\mathbb{C}G = \ker l_v \oplus W$$

olarak yazabileceğimiz bir  $W$  altmodülü vardır.

Son olarak Birinci İzomorfizma Teoremi'nden beklediğimiz gibi

$$V \cong \mathbb{C}G / \ker l_v \cong W$$

buluruz. □

Bu sonuçla birlikte:

1.  $G$ 'nin sadece sonlu sayıda indirgenemez temsili olduğu ve
2. Basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin boyutlarının toplamının  $G$ 'nin mertebesinden küçük eşit olduğu

da kanıtlanmış oldu. Ancak bu bilgiler yeterli değil. Sonlu tane de olsa basit modüllerin sayısının tam olarak kaç olduğu ve bu modüllerin boyutları hakkında daha net bilgilere ulaşmayı hedefliyoruz. Ayrıca düzenli  $\mathbb{C}G$ -modül içinde her bir basit modülden kaçar adet görüldüğünü de hesaplayacağız. Tüm soruları yanıtlamak için kullanacağımız en önemli araçlardan biri Schur'un Önsavı'dır. Bu sonuç sadece temsiller teorisinde değil tüm modüller teorisinde sıklıkla kullanılır.

**Önsav 1** (Schur'un Önsavı).  $V, W$  birer basit  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.

1. Her bir  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması  $\phi : V \rightarrow W$  ya 0'dır ya da izomorfizmadır.
2. Eğer  $W = V$  ise, sıfırdan farklı her  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması  $\phi : V \rightarrow V$  birim dönüşümün bir katıdır, yani

$$\text{End}_{\mathbb{C}G}(V) = \{ \lambda \cdot \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

olur.

*Kanıt.* 1. İlk iddiayı kanıtlamak için  $\phi$ 'nin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Öyleyse  $\phi(v)$ 'nin sıfırdan farklı olduğu en az bir tane  $0 \neq v \in V$  vektörü vardır. Bu durumda,  $v \notin \ker \phi$  olacağından  $\ker \phi \neq V$  olacaktır. Ama  $V$  basit  $\mathbb{C}G$ -modül olduğundan biricik özaltmodülü 0 modülüdür. Dolayısıyla  $\phi$  birebirdir. Şimdi  $\phi$ 'nin örten olduğunu göstermeliyiz. Yukarıdakine benzer şekilde,  $\phi(v) \neq 0$  olduğundan  $\phi$ 'nin görüntüsü de 0 modülünden büyüktür. Ama  $W$  da basit  $\mathbb{C}G$ -modüldü, dolayısıyla,  $\phi$ 'nin görüntüsü 0'dan büyük tek altmodül olan  $W$  olmalıdır, yani  $\phi$  örtendir. Birebir ve örten olduğuna göre,  $\phi$  izomorfizmadır.

2. Şimdi  $\phi : V \rightarrow V$ 'nin izomorfizma olduğunu varsayalım. Hatırlarsanız,  $\phi$  aynı zamanda bir doğrusal dönüşümdü. Kompleks sayılar cismi üzerinde olduğumuzdan  $\phi$ 'nin en az bir tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır. Böyle bir özdeğere  $\lambda$  diyelim ve  $\psi := \phi - \lambda \cdot \text{Id}_V$  homomorfizmasını tanımlayalım. Yukarıdaki gibi  $\ker \psi \subseteq V$  bir altmodül olduğundan ve  $V$  basit olduğundan ya  $\ker \psi = 0$  ya da  $\ker \psi = V$  olacak. Ama  $\lambda$ 'nın özvektörü  $\psi$ 'nin çekirdeğinde olduğu için  $\ker \psi$  sıfır değildir ki bu da  $\psi = 0$ , yani  $\phi = \lambda \cdot \text{Id}_V$  eşitliğini verir. □

Temsil teorisinin bir amacı grupların yapıları hakkında sonuçlar elde etmektir. Bu yöndeki ilk sonucumuz aşağıda. Önce bir tanıma ihtiyacımız var.

$V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun. Eğer  $G$ 'nin bütün  $v \in V$  vektörlerini sabitleyen biricik elemanı  $1 \in G$  ise  $V$ 'ye *sadık modül* denir. Denk olarak,  $V$ 'ye karşılık gelen temsil  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  birebir olmalı.

Gösterimi kolaylaştırmak için  $V$ 'ye karşılık gelen temsilin çekirdeğine aynı zamanda  $V$ 'nin çekirdeği de diyoruz ve  $\ker V$  olarak yazıyoruz.

**Sonuç 3.**  $G$ 'nin sadık basit bir modülü varsa  $G$ 'nin merkezi  $Z(G)$  devirlidir.

*Kanıt.* Soyut bir grubun devirli olduğunu göstermenin bir yolu, bu grubun devirli olduğunu bildiğimiz bir grubun altgrubu olduğunu göstermektir. Önümüzdeki örnekte bu fikri kullanacağız ve  $Z(G)$ 'yi  $\mathbb{C}^\times$ 'nin bir altgrubuna izomorf bulacağız. Cisimler teorisinden bildiğimiz gibi  $\mathbb{C}^\times$ 'nin bütün sonlu altgrupları devirlidir, dolayısıyla bu noktada kanıtımız tamamlanmış olacak.

Belirttiğimiz amaca ulaşmak için de  $Z(G)$ 'nin sadık bir temsili bulacağız. Önermede varlığı verilen sadık ve basit  $\mathbb{C}G$ -modülü  $V$  ile gösterelim. Her  $z \in Z(G)$  için,

$$l_z : V \rightarrow V, \quad l_z(v) = z \cdot v$$

fonksiyonu bir  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması olacaktır. Gerçekten de her  $g \in G$  için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\begin{aligned} l_z(g \cdot v) &= z \cdot (g \cdot v) = (zg) \cdot v \\ &= (gz) \cdot v = g \cdot (z \cdot v) \\ &= g \cdot l_z(v). \end{aligned}$$

Burada yeni olan adım  $zg$ 'nin  $gz$ 'ye dönüşümüdür ki  $z$  merkezi olduğundan bu işlem doğrudur. Şimdi basit  $\mathbb{C}G$ -modül  $V$ 'nin sıfırdan farklı bir endomorfizmasını bulduk. Schur'un Önsavı'ndan  $l_z = \lambda_z \cdot \text{Id}_V$  eşitliğini sağlayan bir  $\lambda_z \in \mathbb{C}^\times$  bulabiliriz.

Adımların her biri  $Z(G)$ 'nin her bir elemanı için doğru olduğundan,

$$\lambda : Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto \lambda_z$$

ile tanımlayacağımız bir fonksiyon buluruz. Bu fonksiyonun bir homomorfizma olduğunu göstermek zor değil: Eğer  $z, t \in Z(G)$  ise,

$$\begin{aligned} (l_t \circ l_z)(v) &= l_t(l_z(v)) \\ &= t \cdot (z \cdot v) \\ &= (tz) \cdot v \\ &= l_{tz}(v) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlar. Bununla birlikte,

$$(l_t \circ l_z)(v) = \lambda_t \lambda_z v$$

ve

$$l_{tz}(v) = \lambda_{tz} v$$

olduğundan  $\lambda_t \lambda_z = \lambda_{tz}$  buluruz.

Şimdi  $\lambda$ 'nın sadık olduğunu gösterelim. Eğer  $z \in Z(G)$  elemanı için  $\lambda(z) = 1$  oluyorsa, yani  $\lambda_z = 1$  ise, aynı zamanda  $l_z = \text{Id}_V$  olur. Ama bu durumda

$z \in \ker V$  olur.  $V$  sadık olduğundan  $\ker V = \{1\}$ 'dir. Dolayısıyla  $z = 1$  olur ve  $\lambda$ 'nın sadık olduğu kanıtlanmış olur.

Sonuç olarak,  $\sigma : Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  sadık homomorfizma (ya da birebir fonksiyon) olduğundan Birinci İzomorfizma Teoremi'nden dolayı görüntüsüne izomorf olacaktır. Bir başka ifadeyle, başta hedeflediğimiz gibi,  $Z(G)$ ,  $\mathbb{C}^\times$ 'nin sonlu bir altgrubuna izomorftur.  $\square$

Elde ettiğimiz sonucun tek yönlü olduğunu unutmayalım. Grubun merkezinin devirli olması sadık basit modül olmasını gerektirmez! *Karakter Tablosu Örnekleri* yazımızda bir karşıt örnek ( $C_3 \rtimes S_3$  yarı-doğrusal çarpım grubu) vereceğiz. Detaylar için okuyucunun önce karakterleri tanıttığı yazıyı beklemesini öneririz.

İlgili bir diğer sonuçsa  $p$ -gruplar (yani mertebesi asal sayı  $p$ 'nin bir kuvveti olan gruplar) için önermenin tersinin de doğru olduğu. Bu iddianın kanıtı için de bazı araçlar geliştirmek gerektiğinden bu yazıda kanıtlamayacağız.

Tersini düşünmemiz gereken bir diğer sonuç Schur'un Önsavı. Şanslıyız ki bu kanıtlayabileceğimiz bir iddia:

**Önerme 1.**  $V$  sıfırdan farklı bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun. Eğer  $V$ 'nin her endomorfizması birim fonksiyonun bir katıysa  $V$  basittir.

*Kanıt.* Çelişki bulabilmek için  $V$ 'nin indirgenebilir olduğunu varsayalım ve  $0 \subset W \subset V$  altmodülünü seçelim. Maschke'nin Teoremi'nden  $V = U \oplus W$  eşitliğini sağlayan bir  $U$  altmodülü buluruz. Bu parçalanışı kullanıp  $\pi_U : V \rightarrow U$  izdüşümünü ve  $\iota_U : U \rightarrow V$  içermesini tanımlayalım. Her iki fonksiyonun  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması olduğu açıktır. Dolayısıyla bileşkeleri de  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizması olacaktır. Ancak  $\iota_U \circ \pi_U$  endomorfizmasının birim fonksiyonun bir katı olması mümkün değildir. Çünkü örneğin,  $W$ 'nin her bir elemanı  $0$ 'a gitmektedir. Dolayısıyla baştaki kabulümüzle çelişen bir sonuç elde ettik. Çelişkinin kaynağı  $V$ 'nin indirgenebilir olduğu iddiamız olduğundan,  $V$  indirgenemez, yani basit olmalı. Hedeflediğimiz sonuca ulaştık.  $\square$

Bu noktada okuyucumuza alternatif bir yol önereceğiz. Schur'un önemli bir diğer uygulaması  $\mathbb{C}G$ -modüller arasındaki homomorfizma uzaylarını incelemektir. Elde edilen sonuçlar daha sonra kritik noktalarda kullanılacaktır. Yazının devamında bu uygulamayı göstereceğiz. Bununla birlikte, yukarıdaki sonuçlar abel gruplarının tüm basit temsillerini bulmak için de yeterlidir. Bu sonucu ayrı bir

yazı olarak vermeyi uygun gördük. Dileyen okuyucu bu yazıya kısa bir ara verip, *Abel Grupları* yazımızı okuyabilir.

Bahsettiğimiz uygulamayla birlikte verilen bir  $CG$ -modülü basit  $CG$ -modüllerin dolaysız toplamı olarak yazmak için bir yöntem ortaya koyacağız. Örneğin düzenli  $CG$ -modül  $CG$ 'nin her bir basit  $CG$ -modülü içerdiğini kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer  $U_1, U_2, \dots, U_k$  ( $k = k(G)$ ) bütün  $CG$ -modüllerin bir listesiyle,

$$CG \cong U_{i_1} \oplus U_{i_2} \oplus \dots \oplus U_{i_n}$$

parçalanışı vardır. Ne var ki bazı terimler birbirine izomorfik olabilir. Dolayısıyla her bir basit modülden kaç kopya görüldüğünü belirlememiz gerekir. Bu problemi tüm  $CG$ -modüller için çözeceğiz.

**Önerme 2.**  $V$  bir  $CG$ -modül ve

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n \quad (*)$$

$V$ 'nin basit modüllere bir parçalanışı olsun. Ayrıca  $U \subseteq V$  de basit  $CG$ -modül olsun. Bu durumda  $U \cong V_i$  olan bir  $i$  vardır.

Bir başka ifadeyle, basit modüllere parçalanışın bir örneğini belirledikten sonra, herhangi başka bir basit altmodül bu parçalanıştaki terimlerden biriyle izomorfiktir. Burada "eşitlik" olmak zorunda değildir.

*Kanıt.* Verilen parçalanışa göre  $j$ 'inci terime izdüşümü  $\pi_j : V \rightarrow V_j$  ile gösterelim. Ek olarak,  $\pi_j$ 'nin  $U$ 'ya kısıtlaması  $\pi_j|_U : U \rightarrow V_j$  olsun. Şimdi  $0 \neq u \in U$  elemanının  $(*)$  parçalanışına göre yazımı  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ise, en az bir  $i$  için  $u_i \neq 0$  olacaktır. Öyleyse  $\pi_i|_U (u_i)$  de sıfırdan farklı olur. Bir başka ifadeyle,  $\pi_i|_U \neq 0$  elde ederiz. Ama  $\pi_j|_U$  iki basit modül arasındaki bir homomorfizmaydı, dolayısıyla izomorfizmadır ve beklendiği gibi  $U \cong V_i$  sonucuna varırız.  $\square$

$V$  bir  $CG$ -modül ve  $U$  bir basit  $CG$ -modül olsun. Eğer  $V$ 'nin  $U$ 'ya izomorfik bir altmodülü varsa  $U$ 'ya  $V$ 'nin basit bileşeni denir. Benzer şekilde,  $W$  da bir  $CG$ -modülken  $V$  ve  $W$ 'nun birbirlerine izomorfik basit altmodülleri varsa  $V$  ve  $W$ 'nin ortak bileşeni vardır deriz.

Örnek olarak  $C_3 = \langle c \rangle$  grubunun düzenli modülünün basit bileşenlerini bulmaya çalışalım. Hatırlarsanız düzenli modül, bazı  $\{1, c, c^2\}$  olan kompleks vektör uzayıydı ve grubun etkisi soldan çarpmayla veriliyordu. Bildiğimiz üzere, her bir basit

$CC_3$ -modül bu modülün bir altmodülüne izomorfiktir. Yeni tanımımızla tekrarlarsak, her bir basit  $CC_3$ -modül düzenli modülün bir bileşenidir. Ayrıca *Örnekler* yazımızda da görebileceğiniz gibi  $C_3$ 'ün üç tane bir boyutlu modülü vardır. Bu modülleri  $U_1, U_2, U_3$  ile gösterirsek,

$$CS_3 \cong U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

yazarız. Başka bir terim olmadığını boyut karşılaştırmasıyla bulduk!

Eğer izomorfizm işaretini eşitlikle değiştirmek istersek  $CC_3$ 'ün  $U_1, U_2, U_3$  modüllerine izomorfik altuzaylarını bulmalıyız. Öncelikle bu modüllere karşılık gelen homomorfizmaları belirleyelim.

$U_1$  aşikâr modül olsun, yani her  $g \in C_3$  ve  $u \in U_1$  için  $g \cdot u = u$  olsun.

$U_2$   $C_3$ 'ün etkisinin  $c \cdot u = \omega u$  ile verildiği modül olsun. Burada  $\omega$  birimin ilkel üçüncü köklerinden birini gösteriyor.

$U_3$   $C_3$ 'ün etkisinin  $c \cdot u = \omega^2 u$  ile verildiği modül olsun.

Amacımız bu modülleri üretecek vektörler bulmak. İlk olarak aşikâr modülü ele alalım.  $C_3$ 'ün aşikâr etkisi için düzenli modülün sabit bir vektörüne ihtiyacımız var. Grup etkisi vektör uzayının bazını karıştırdığı için baz elemanlarını toplamak yeterli olmalı. Gerçekten de  $u_1 = 1 + c + c^2$  yazarsak,

$$c \cdot u_1 = u_1 \quad \text{ve} \quad c^2 \cdot u_1 = u_1$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Böylece  $U_1$  aşikâr modülünün  $u_1$ 'in gerdiği  $\tilde{U}_1$  altmodülüne izomorf olduğunu bulmuş olduk.

Sırada diğer iki modülü belirleme görevi var. Bu biraz daha zor. Genel bir yöntem bilinse de bu noktada henüz onu kullanmaya yetecek kadar teori geliştirmedik. Öyleyse denklem çözmeye çalışalım. Aradığımız vektör,

$$u_2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot c + \gamma \cdot c^2$$

olsun. Beklentimiz,

$$c \cdot u_2 = \omega u_2 \quad (**)$$

olması yönünde. Şimdi,

$$\begin{aligned} c \cdot u_2 &= c \cdot (\alpha \cdot 1 + \beta \cdot c + \gamma \cdot c^2) \\ &= \alpha \cdot c + \beta \cdot c^2 + \gamma \cdot 1 \\ &= \gamma \cdot 1 + \alpha \cdot c + \beta \cdot c^2 \end{aligned}$$

hesabına göre  $c$ 'nin etkisinin katsayıları karıştırdığını görürüz. Bu etki  $c$ 'nin  $\{1, c, c^2\}$  kümesinin elemanlarıyla soldan çarpımına benzer. Bunu da aklımızda tutarak,

$$u_2 = 1 + \omega c + \omega^2 c^2$$

olabileceğini görürüz. Seçimimiz yukarıdaki (\*\*) eşitliğini sağlıyor. Öyleyse  $U_2$ 'ye izomorfik altmodülü  $u_2$ 'nin gerdiği  $\tilde{U}_2$  olarak alabiliriz.

Artık  $\tilde{U}_3$ 'ü nasıl bulacağımızı biliyoruz,  $u_3 = 1 + \omega^2 c + \omega c^2$  vektörü  $U_3$ 'e izomorfik bir altmodül gerecektir.

Sonuç olarak,

$$\mathbb{C}G_3 = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2 \oplus \tilde{U}_3$$

parçalanışını bulduk.

Burada ilk hesabımızla son hesabımız arasındaki farka dikkat etmelisiniz. Soyut olarak yaptığımız hesap sonrakine göre daha etkin ve çabuk sonuç verdi!

Örneğimizdeki grup abel olduğundan düzgün modülün parçalanışında her bir basit modülden bir tane çıkmak zorundaydı. Abel olmayan gruplarda bu doğru değil. Yeni bir örnek vermek yerine yukarıda bahsettiğimiz yönteme bakalım. Aslında amacımız aşağıdaki soruyu da cevaplamak:

**Soru:**

$$\mathbb{C}G \cong U_{i_1} \oplus U_{i_2} \oplus \dots \oplus U_{i_n}$$

yazımına göre, verilen her bir basit  $\mathbb{C}G$ -modül  $U$  için  $\{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\} : U_i \cong U\}$  sayısını kaçtır?

Hedefimiz bu sayının  $U$ 'nun boyutuna eşit olduğunu göstermek. Hatırlarsanız  $V$  modülünden  $W$  modülüne giden  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizmalarının kümesini  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$  ile göstermiştik. Bu küme aslen bir  $\mathbb{C}$ -vektör uzayıdır. Gerçekten de eğer toplamayı,

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v),$$

ve katsayılarla çarpmayı,

$$(\lambda\phi)(v) := \lambda\phi(v)$$

olarak tanımlarsak vektör uzayı aksiyomları sağlanır. Ortaya çıkan bu vektör uzayı bir çok sonuç için anahtar olacak. İlk olarak Schur'un Önsavı aşağıdaki gibi verilebilir:

**Önerme 3.**  $V, W$  basit  $\mathbb{C}G$ -modüller olsun.  $O$  zaman,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } V \cong W, \\ 0, & \text{eğer } V \not\cong W. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Burada dikkat çekmek istediğim bir nokta var. Aslında  $U$ 'ya izdüşüm alırken  $V$ 'nin içinde  $U$ 'ya izomorfik olan bir altuzaya izdüşüm alıyoruz. Benzer şekilde  $U$ 'dan  $W$ 'ya giden homomorfizma da  $U$ 'ya izomorfik bir kopyaya gitmektedir. Dolayısıyla yukarıdaki şekilde görünmeyen bazı izomorfizmalar da bulunmaktadır. Okuyucu bu görünmez izomorfizmaları diyagrama eklemeye çalışabilir.

*Kanıt.* Hemen hemen Schur'un Önsavı olduğu açık olan önermede kontrol edeceğimiz bir nokta var. İlk olarak  $V \not\cong W$  olduğundan, sıfırdan farklı  $V \rightarrow W$  homomorfizmaları olmadığını biliyoruz. Eşitlik durumundaysa tüm homomorfizmalar birimin katıydı. Şimdi  $\phi : V \rightarrow W$  izomorfizmasını seçip sabitleyelim. Bununla birlikte  $\phi^{-1} : W \rightarrow V$  de bir izomorfizma olacak. Öte yandan  $\psi : V \rightarrow W$  rasgele bir izomorfizma olsun. Eğer  $\phi^{-1}$  ile bileşke alırsak,

$$\phi^{-1} \circ \psi : V \rightarrow V$$

izomorfizmasını elde ederiz. Schur'un Önsavı'ndan  $\phi^{-1} \circ \psi = \lambda_{\psi} \text{Id}_V$  eşitliğini sağlayan bir  $\lambda_{\psi} \in \mathbb{C}$  vardır. Son olarak soldan  $\phi$  ile bileşke aldığımızda  $\psi = \lambda_{\psi} \phi$  buluruz. Öyleyse,  $\psi$  seçimimiz rasgele olduğundan,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \{\lambda\phi \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

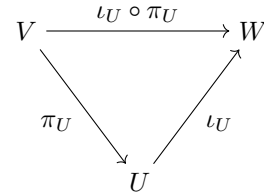
elde edilir ki bu eşitlik  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 'nin boyutunun 1 olduğunu gösteriyor.  $\square$

Sıradaki sonucumuz ortak basit bileşene sahip olma durumunu açıklıyor.

**Önerme 4.**  $V, W$   $\mathbb{C}G$ -modüller olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

1.  $V$  ile  $W$ 'nin ortak basit bileşeni vardır,
2.  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \{0\}$ .

*Kanıt.* Önce  $1. \implies 2.$  önermesini kanıtlayalım. Bu amaçla  $U$ 'nun  $V$  ile  $W$ 'nin ortak bileşeni olduğunu varsayalım. Öyleyse Maschke'nin Teoremi'nden  $V \cong U \oplus V'$  ve  $W \cong U \oplus W'$  izomorfizmalarını buluruz. Bu gösterimde  $V'$  ve  $W'$  ile  $U$  modülünün tümleyenlerini gösteriyoruz. Aşağıdaki bileşkenin  $V$ 'den  $W$ 'ya sıfır olmayan bir homomorfizma verdiği açıktır.



Daha önce olduğu gibi,  $\pi_U$  ile  $U$ 'ya izdüşümü,  $\iota_U$  ile de  $U$ 'yu içermeyi gösteriyoruz.<sup>2</sup>

Şimdi  $2. \implies 1.$  önermesini kanıtlayalım. Bunun için  $\phi : V \rightarrow W$  sıfırdan farklı bir  $\mathbb{C}G$ -homomorfizma olsun. Eğer  $\phi$  birebirse o zaman

$V$  modülü  $W$ 'nin bir altmodülüne izomorfik olur ve bu durumda ortak bileşenleri olacağı açıktır. Öyleyse  $\ker \phi \neq 0$  olduğunu varsayalım. Maschke'nin Teoremi'nden  $V = \ker \phi \oplus V'$  yazmamızı sağlayan bir altmodül  $V'$  vardır. Ayrıca  $\ker \phi \cap V' = 0$  olduğundan  $\phi|_{V'}$  kısıtlaması birebir olacak. O halde eğer  $X$  ile  $V'$ 'nin basit bir bileşeni gösterirsek,  $X \cong \phi(X)$  de  $W$ 'nin basit bileşeni olur. (Burada Birinci İzomorfizma Teoremi'ni kullandık.) Hedeflediğimiz gibi ortak basit bileşen  $X$ 'i bulmuş olduk.  $\square$

Sıradaki sonuç homomorfizma uzaylarının girdilerine göre doğrusallığını gösterecek. Doğrusal toplamla birlikte güçlü bir araç da elde etmiş olacağız.

**Önerme 5.**  $V, V_1, V_2, W, W_1, W_2$  harflerinden her biri birer  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.

1.  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ ,
2.  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W)$ .

*Diğer bir ifadeyle  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(-, -)$  her iki girdisinde de doğrusaldır.*

*Kanıt.* Verilen izomorfizmaları kanıtlamak için gerekli fonksiyonları verelim. Bunların gerçekten işe yaradığını kanıtlamayı okuyucuya alıştırmaya bırakacağız.

1.  $\phi \mapsto (\pi_1 \circ \phi, \pi_2 \circ \phi)$  ve geriye doğru  $(\phi_1, \phi_2) \mapsto (v \mapsto (\phi_1(v), \phi_2(v)))$ ,
2.  $\psi \mapsto (\psi \circ \iota_1, \psi \circ \iota_2)$  ve geriye doğru  $(\psi_1, \psi_2) \mapsto ((v_1, v_2) \mapsto \psi_1(v_1) + \psi_2(v_2))$ .

Daha önce olduğu gibi,  $\pi_i$ 'ler izdüşüm,  $\iota_i$ 'ler içerme fonksiyonlarını gösteriyor.  $\square$

Kanıtladığımız eşitliklerin her iki tarafının boyutunu hesaplayıp tümevarım da kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

**Sonuç 4.**  $V, V_1, V_2, \dots, V_m$  ve  $W, W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$   $\mathbb{C}G$ -modüller olsun.

1.  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, \bigoplus_{i=1}^n W_i) = \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_i)$ ,
2.  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\bigoplus_{j=1}^m V_j, W) = \sum_{j=1}^m \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_j, W)$ ,
3.  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\bigoplus_{j=1}^m V_j, \bigoplus_{i=1}^n W_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_j, W_i)$ .

Başlangıçtaki sorumuzu cevaplamaya hazırız. Verilen bir  $\mathbb{C}G$ -modül  $V$ 'nin basit modüllere parçalanışında her bir basit modülün kaç kere görüldüğünü bulmak istiyoruz. Önce  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$  yazalım,  $U$  ile de bir basit  $\mathbb{C}G$ -modülü gösterelim. O zaman Önerme 5'i kullanıp,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, U)$$

denkliğini yazarız. Diğer taraftan Önerme 3 sağ taraftaki terimlerin  $V_i \cong U$  sağlanmadıkça 0 olduğunu verir. Diğer durumdaysa  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, U)$  bir boyutlu olacaktır. Öyleyse her iki tarafın boyutunu hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U) &= \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, U) \\ &= |\{i \in \{1, 2, \dots, k\} | V_i \cong U\}| \end{aligned}$$

buluruz. O halde aşağıdaki sonuca ulaştığımız olduk:

**Sonuç 5.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül,  $U$  ise bir basit  $\mathbb{C}G$ -modül olsun. Bu durumda,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U)$$

*boyutu,  $V$ 'nin herhangi bir basit modüllere parçalanışındaki terimlerden  $U$ 'ya izomorfik olanların sayısına eşittir.*

Elde ettiğimiz bu yöntem soyut olmakla birlikte somut durumlarda söz konusu boyutu hesaplamak için kullanabileceğimiz alternatif yöntemler de olduğundan kullanışlı bir araçtır. Hedeflerimizden biri olan aşağıdaki örnekle bu durumu somutlayalım:

**Teorem 2.**  $U$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olmak üzere,

1.  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U) \cong U$
2.  $U_1, U_2, \dots, U_k$  basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin listesi olmak üzere,  $d_i = \dim_{\mathbb{C}} U_i$  ise

$$\mathbb{C}G \cong U_1^{d_1} \oplus U_2^{d_2} \oplus \dots \oplus U_k^{d_k}$$

*olur. Burada  $U_i^{d_i}$  ile  $U_i$ 'nin  $d_i$  kopyasının dolaysız toplamını gösteriyoruz.*

*Kanıt.* **1.** İlk iddiamız her  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$  homomorfizmasının  $1 \in G$ 'deki değeri tarafından belirlendiği olacak. Gerçektende eğer  $\phi(1) = u$  ise herhangi bir  $x \in \mathbb{C}G$  için,

$$\phi(x) = \phi(x \cdot 1) = x \cdot \phi(1) = x \cdot u$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan,  $\phi(1)$ 'in  $U$ 'nun herhangi bir elemanı olarak seçilmesinde bir engel yoktur. Dolayısıyla birinci kısım kanıtlanmış olur. Elde ettiğimiz izomorfizmanın doğrusal olduğuna dikkat ediniz, yani aslında vektör uzaylarının izomorfizmasını bulduk.

**2.** Bu kısım Sonuç 5 ve ilk kısmın birleştirilmesiyle kolayca kanıtlanır.  $\square$

Bütün basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin (izomorfizma sınıflarının temsilcilerinin) kümesini  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ile gösterelim, yani

$$\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$$

olsun. Burada her  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $U_i$  basit olup  $i \neq j$  seçildiğinde  $U_i \not\cong U_j$  sağlanır. Ayrıca herhangi bir basit  $\mathbb{C}G$ -modül  $U$  verildiğinde  $U \cong U_i$  izomorfizması biricik  $i$  için doğrudur.

Aşağıdaki sonuç bir önceki teoremden boyutları karşılaştırarak kolayca elde edilse de önemli olduğundan teorem olarak vereceğiz.

**Teorem 3.**

$$|G| = \sum_{U_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} (\dim_{\mathbb{C}} U_i)^2$$

Yukarıdaki eşitlik en az iki açıdan çok önemlidir.

1. Grubun mertebesini sadece temsiller cinsinden belirlemektedir. Bu sayı grubun en önemli değişmezlerinden olduğundan temsiller teorisinin gruplar teorisine önemli bir uygulaması olarak görülebilir.
2. Verilen eşitlik basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin boyutları için önemli bir kısıtlama getiriyor. Öncesinde toplamalarının  $|G|$ 'den küçük olacağını görmüştük, karelerin toplamı olasılıkları önemli ölçüde sınırlamaktadır.

İkinci kısıt yine de tatmin edici değil. Çok daha kullanışlı olan başka bir kısıt boyutların grubun mertebesini böldüğünü de veriyor. Ancak bu sonucu kanıtlayacak derinliğe güncel sayıda ulaşamayacağız. Yine de kareler üzerindeki kısıtlama bazı mertebeler için basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin boyutlarını belirlemek için yeterlidir.

**Örnek 1.**  $G = S_3$ 'ün iki tane bir boyutlu modülü olduğunu biliyoruz. Öyleyse  $6 - 2 = 4$ 'ü karelerin toplamı olarak yazmalıyız.  $S_3$  abel grubu olduğundan (bir sonraki yazımızdaki sonuca atıfla)

bütün basit modülleri 1 boyutlu değildir. O zaman tek seçenek 2 boyutlu bir basit modülünün daha olmasıdır. *Örnekler* yazımızda bu basit modülün tarifini de bulabilirsiniz.

**Örnek 2.**  $G = D_8$  olsun. Aşikâr modülün yanı sıra *Örnekler* yazısında bir tane de 2 boyutlu basit temsil bulmuştuk. Öyleyse toplam  $1 + 2^2 = 5$  olur. Geriye kalan 3 boyut için tek olasılık 3 tane daha 1 boyutlu basit temsil olmasıdır. Bu temsillerin ne olduklarını da ilerleyen sayfalarda belirleyeceğiz.

**Örnek 3.**  $G = Q_8$  olduğunda da benzer bir yöntem uygulayabiliriz. Aşikâr olmayan modüllerden gelmesi gereken toplam 7'dir. Bu sayıyı kareler toplamı olarak yazmanın tek yolu  $1 + 1 + 1 + 2^2$  olduğundan  $Q_8$ 'in basit modüllerinin boyutları da ortaya çıkmış olur.

**Örnek 4.** Daha fazla bilgi olmadan çözemeyeceğimiz ilk mertebe  $10$ 'dur. Bu mertebedeki biricik abel olmayan grup  $D_{10}$ 'u alırsak,

$$\begin{aligned} 10 &= 1 + 3^2 \\ &= 1 + 1 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2^2 \end{aligned}$$

seçeneklerinden ikisini elemeliyiz. Bunun için  $D_{10}$ 'un basit temsillerini belirleyebiliriz. Alternatif olarak daha sonra kanıtlayacağımız ve 1 boyutlu karakterlerin sayısını veren sonuca atıfta bulunup ortadaki seçeneğin geçerli olacağı sonucuna ulaşabiliriz.

Yukarıda bahsettiğimiz 1 boyutlu modüllerinin sayısını veren teoremi kanıtlayalım. Bu amaca ulaşmak için gruplar teorisinden bir kavramı hatırlatalım.

Grup  $G$ 'nin *değişimleyen* (ya da *komütatör*) altgrubu  $G'$ ,  $ghg^{-1}h^{-1}$  formundaki elemanlarının gerdiği altgruptur. Bu altgrubu  $G/N$ 'nin abel olduğu normal altgrupların biricik en küçük altgrubu olarak da tanımlayabiliriz.

Tanımımız bir denklik iddiasında bulunuyor. Grup teoretik olan kanıt gruplar teorisi kitaplarında rahatlıkla bulunabilir. İlgili okuyucu kanıtı kendisi yapmayı da deneyebilir. Hatırlatmayla birlikte aşağıdaki teoremi kanıtlamaya hazırız.

**Teorem 4.** Grup  $G$ 'nin 1 boyutlu modülleriyle bölüm grubu  $G/G'$ 'nin 1 boyutlu modülleri arasında birebir eşleme vardır.

Özel olarak,  $G$ 'nin 1 boyutlu temsillerinin sayısı  $[G : G'] = |G|/|G'|$ 'dür.

*Kanıt.*  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  bir homomorfizma olsun.  $\phi$ 'nin görüntüsü abel grubu olduğundan, Birinci İzomorfizma Teoremi'nden dolayı,  $G/\ker \phi$  abel grubu olmalı. Öyleyse  $G'$  bu özelliği taşıyan minimal grup olduğundan  $G' \leq \ker \phi$  elde ederiz. Daha sonra,

$$\tilde{\phi} : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \tilde{\phi}(gG') = \phi(g)$$

fonksiyonunu tanımlarız. Bu fonksiyonun düzgün tanımlı bir homomorfizma olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz. Böylece,

$$\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow \text{Hom}(G/G', \mathbb{C}^\times), \quad \phi \mapsto \tilde{\phi}$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonun tersini elde etmek için  $\psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^\times$  homomorfizmasını alalım. Önceki duruma benzer şekilde  $\tilde{\psi} : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  fonksiyonunu  $\tilde{\psi}(g) = \psi(gG')$  eşitliğiyle verelim. Bu fonksiyon bir homomorfizma olur; çünkü her  $g, h \in G$  için,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(gh) = \psi(ghG') &= \psi(gG' \cdot hG') \\ &= \psi(gG')\psi(hG') = \tilde{\psi}(g)\tilde{\psi}(h) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Dolayısıyla,

$$\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \longleftarrow \text{Hom}(G/G', \mathbb{C}^\times), \quad \tilde{\psi} \leftarrow \psi$$

fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyonun bir öncekinin tersi olduğunu görmek kolaydır. Öyleyse,

$$|\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)| = |\text{Hom}(G/G', \mathbb{C}^\times)|$$

olur. İkinci iddiamız bir sonraki yazımızın ana sonucu, abel gruplarının tüm basit temsillerinin 1 boyutlu olduğunu kanıtlayan sonuçtan gelmektedir.  $\square$

Yukarıdaki eşlemenin daha anlaşılır olması için kurulumu ayrıca ve soyut olarak tanımlayalım. Bu

tanımla birlikte çok boyutlu basit modül elde etmenin bir yolu da ortaya çıkacak.

$N \trianglelefteq G$  bir normal altgrup,  $\pi : G \rightarrow G/N$  de doğal izdüşüm homomorfizması olsun. Ayrıca  $W$  bir  $\mathbb{C}[G/N]$ -modül olsun. Her  $g \in G$  ve  $w \in W$  için,

$$g \cdot w := \pi(g) \cdot w$$

tanımı  $W$ 'yu bir  $\mathbb{C}G$ -modül yapar. Dikkat edilirse altta olan vektör uzayı yapısını değiştirmeden  $W$  üzerindeki  $G/N$  etkisini bir  $G$  etkisine taşıdık. Yeni oluşan  $\mathbb{C}G$ -modülü  $\text{Inf}_{G/N}^G W$  ile gösterelim. Temel olarak yaptığımız  $N$ 'nin elemanlarının aşikâr etki etmesini söylemekten fazlası değil. Bu kurulum,

$$\mathbb{C}[G/N]\text{-mod} \longrightarrow \mathbb{C}G\text{-mod}, \quad W \mapsto \text{Inf}_{G/N}^G W$$

fonksiyonunu veriyor. Bu fonksiyonun basit modülleri basit modüllere götürdüğünü iddia ediyoruz. Kanıt için  $W$ 'nun basit  $\mathbb{C}[G/N]$ -modül olduğunu varsayalım ve  $\text{Inf}_{G/N}^G W$ 'nin bir  $\mathbb{C}G$ -altmodülü  $U$ 'yu alalım. Her  $g \in G$  ve  $u \in U$  için  $g \cdot u \in U$  olacak. Ancak tanımımızdan dolayı,

$$g \cdot u = (gN) \cdot u$$

sağlanır. Eşitliğin sağ tarafı  $U \subseteq W$ 'nin bir  $\mathbb{C}[G/N]$ -altmodülü olduğunu belirtiyor. Dolayısıyla  $U = W$  ya da  $U = 0$  sağlanır, yani  $\text{Inf}_{G/N}^G W$  basit  $\mathbb{C}G$ -modüldür. Özetlersek:

**Önerme 6.**  $N \trianglelefteq G$  ve  $W$  basit  $\mathbb{C}[G/N]$ -modül olsun. Yukarıda tanımlanan  $\mathbb{C}G$ -modül  $\text{Inf}_{G/N}^G W$  basit  $\mathbb{C}G$ -modüldür.

Bu notasyonla Theorem 4'teki eşlemeyi daha net yazabiliriz. Eğer  $\phi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^\times$  bir homomorfizmaysa  $\tilde{\phi} = \text{Inf}_{G/G'}^G \phi$  olur.

# Grup Temsilleri: Abel Gruplarının Temsilleri

Olçay Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Bu yazımızda abel gruplarının indirgenemez temsillerini bulacağız. Maschke ve Schur teoremlerinin de kullanılacağı bu sonuca ulaşmak için sonlu abel gruplarının sınıflandırma teoremine de ihtiyacımız var. Bu yazı boyunca  $A$  sonlu bir abel grubu olsun. Gerekliğinde kullanmak üzere  $A$ 'nın mertebesine  $n$  diyelim. İlk olarak basit  $\mathbb{C}A$ -modüllerin boyutunu belirleyelim.

**Önerme 1.** Her bir basit  $\mathbb{C}A$ -modül 1 boyutludur.

*Kanıt.* Bir kere daha Schur'un Önsavı'nı kullanacağız. Bu nedenle,  $V$  basit  $\mathbb{C}A$ -modülünü alalım.  $A$  abel grubu olduğundan, her  $a \in A$  için,

$$l_a : V \rightarrow V, \quad v \mapsto a \cdot v$$

fonksiyonu bir  $\mathbb{C}A$ -modül homomorfizması olur.<sup>1</sup> Üstelik Schur'un Önsavı'ndan  $l_a = \lambda_a \cdot \text{Id}_V$  eşitliğini sağlayan bir  $\lambda_a \in \mathbb{C}$  sabiti de vardır. Başka bir ifadeyle, her  $v \in V$  için  $l_a(v) = \lambda_a v$  olur. Bunun anlamı, sabit her  $v \in V$  vektörü için,  $v$ 'yi içeren doğrunun (yani 1 boyutlu altuzayın) aynı zamanda bir  $\mathbb{C}A$ -altmodül olduğudur. O zaman, eğer  $V$ 'nin boyutu 1'den büyükse, sıfır haricinde alacağımız herhangi bir vektörün gereceği altuzay,  $V$ 'nin sıfırdan farklı bir özaltmodülü olur. Buna karşın  $V$  indirgenemezdi; öyleyse tek seçenek  $V$ 'nin 1 boyutlu olmasıdır.  $\square$

Bu önermenin tersi de doğrudur. O halde bir grubun abel olup olmadığını sadece temsillerine bakarak anlamak mümkündür.

**Önerme 2.** Sonlu grup  $G$ 'nin bütün basit modülleri 1 boyutluyorsa  $G$  abeldir.

*Kanıt.* Bu kez Maschke'yi kullanacağız. Bu teoreme göre, her  $\mathbb{C}G$ -modül basit modüllerin dolaysız toplamı olarak yazılabilir. Özel olarak düzenli  $\mathbb{C}G$ -modül  $\mathbb{C}G$ 'de bazı basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin dolaysız

toplamıdır:

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

Bu gösterimde her bir  $V_i$  basittir. Yukarıdaki önermeden, her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $V_i$ 'nin boyutunun 1 olduğunu biliyoruz; öyleyse  $0 \neq v_i \in V_i$  seçersek  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesi  $\mathbb{C}G$  vektör uzayının bir bazı olur.

Şimdi  $x, y \in G$  olsun. Amacımız  $xy = yx$  olduğunu göstermek. Eğer  $x$  ve  $y$ 'nin  $\mathbb{C}G$  üzerindeki etkilerinin matrislerini  $\mathcal{B}$  bazında hesaplırsak,  $V_i$  doğruları aynı zamanda birer altmodül olduğundan, bu matrislerin ikisi de köşegen olacaktır. Köşegen olmanın bir sonucu olarak, bu matrisler değişmelidir. Bir diğer deyişle, eğer düzenli temsili  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}G)$  olarak gösterirsek,

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(x) = \rho(yx)$$

olur. Fakat  $\rho$  sadıktı. Dolayısıyla bu eşitlik bize  $xy = yx$  eşitliğini de verir. Artık aradığımız eşitliğe ulaştığımız olduk.  $\square$

Önerme 1'den ulaştığımız bir diğer sonuç aşağıda. Kanıtı temsillerin tanımından kolayca elde edilir.

**Sonuç 1.** Abel grubu  $A$ 'nın basit modülleriyle  $A$ 'dan  $\mathbb{C}^\times$ 'ya giden grup homomorfizmaları arasında birebir eşleme vardır.

Öyleyse  $A$ 'nın basit temsillerini belirleme görevi  $A \rightarrow \mathbb{C}^\times$  homomorfizmalarını belirlemeye denktir. Gruplar teorisinin iyi bilinen sonuçlarından biri, her abel grubunun devirli grupların dolaysız çarpımı olarak yazılabileceğini vermektedir. Öyleyse,

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$$

eşitliğini veren devirli  $A_1, A_2, \dots, A_k$  grupları vardır. Problemi devirli gruplara indirgemek üzere aşağıdaki sonucu kanıtlayacağız.

<sup>1</sup>Bu iddianın bir benzerini önceki yazımızda  $G$  grubunun merkezi  $Z(G)$  için kanıtlamıştık.

**Önsav 1.**  $G_1, G_2$  ve  $K$  abel grupları olsun.

$$\text{Hom}(G_1 \times G_2, K)$$

↓

$$\text{Hom}(G_1, K) \times \text{Hom}(G_2, K)$$

izomorfizması vardır. Diğer bir ifadeyle,  $G_1 \times G_2$ 'den  $K$ 'ye homomorfizmalarla  $G_1$ 'den  $K$ 'ye ve  $G_2$ 'den  $K$ 'ye homomorfizma ikilileri birebir eşlenir.

*Kanıt.* Varlığı tahmin edilen eşlemeyi kurabiliriz. Bunun için dolaysız çarpımdan doğal olarak elde ettiğimiz  $\iota_i : G_i \rightarrow G_1 \times G_2$  ve  $\pi_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$  homomorfizmalarını kullanacağız. Tanımı yapmaya hazırız. (Gösterimimiz satıra sığabilsin diye  $G = G_1 \times G_2$  yazalım.)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(G, K) & \rightarrow & \text{Hom}(G_1, K) \times \text{Hom}(G_2, K) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi \circ \iota_1, \varphi \circ \iota_2) \\ \varphi_1 \circ \pi_1 + \varphi_2 \circ \pi_2 & \leftarrow & (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

Her iki yönde de ortaya çıkan fonksiyonların grup homomorfizması olduğu aşikârdır. Ayrıca ikili bileşkelerin birim fonksiyonu verdiği de kolayca görülebilir.  $\square$

Yukarıdaki problemimize dönersek, bu sonuçla birlikte, bir abel grubunun basit modüllerini bulmak için grubun çarpanları olan devirli grupların basit modüllerini belirlemek yeterlidir. Yöntemimizi algoritmik olarak açıklayacağız.

İlk olarak her  $A_i$  devirli grubu için bir üreteç seçip sabitleyelim, yani  $A_i = \langle a_i \rangle$  olsun. *Örnekler* yazımızda devirli grupların temsillerini bulmayı öğrenmiştik. Şimdiki duruma uygun olması için yeniden adlandıralım:  $A_i$ 'nin mertebesi  $n_i$  olsun ve birimin  $n_i$ 'nci ilkel köklerinden birini seçip sabitleyelim ve  $\omega_i$  ile gösterelim. Daha net olarak söylemek gerekirse  $\omega_i$  kompleks sayısı,

$$\omega_i^{n_i} = 1 \text{ ve her } m < n_i \text{ için } \omega_i^m \neq 1$$

önermelerini sağlar. Bu gösterimle birlikte, her  $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$  için tanımlayacağımız,

$$\phi_i^j : a_i \mapsto \omega_i^j$$

homomorfizması  $A_i$ 'nin bir basit modülü olur. Dahası  $A_i$ 'nin bütün basit modülleri bu formdadır.

Son olarak Önsav 1'i kullanıp aşağıdaki tarife ulaşırız.

**Teorem 1.** Abel grubu  $A$ 'nın devirli çarpanlara ayrımı  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  olsun. Her  $j_i < n_i$  olmak üzere, seçilen her  $(j_1, j_2, \dots, j_k)$  için tanımlanan,

$$(\phi_i^{j_i})_i : A \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad (a_i)_i \mapsto (\omega_i^{j_i})_i$$

fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Ayrıca her  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}^\times$  homomorfizması bu formdadır.

Bir örnek verelim.  $A = V_4 = C_2 \times C_2$  olsun. İlk olarak  $C_2 = \langle c \rangle$ 'nin indirgenemez temsillerini (yani basit modüllerini)  $\phi_1 : c \mapsto 1$  ve  $\phi_{-1} : c \mapsto -1$  olacak. Grubun mertebesi 2 olduğundan  $\phi_i^2$  birim fonksiyona eşittir.

Şimdi  $V_4$ 'ün temsillerini listeleyebiliriz. Listeyi matris formunda verelim.  $V_4$ 'ün elemanlarını  $a, b, c$  olarak göstereceğiz. İlk  $C_2$  çarpanını  $a$ , ikincisini  $b$  ile gerdiğimizi varsayalım. Ayrıca gösterimi kolaylaştırmak için  $a = (a, 1), b = (1, b)$  ve  $c = (a, b)$  yazalım. Bu durumda temsillerin matrisi aşağıdaki gibi olur.

$V_4$	1	$a$	$b$	$c$
$(\phi_1, \phi_1)$	1	1	1	1
$(\phi_1, \phi_{-1})$	1	1	-1	-1
$(\phi_{-1}, \phi_1)$	1	-1	1	-1
$(\phi_{-1}, \phi_{-1})$	1	-1	-1	1

Temsilleri matrislerle göstermek her zaman kolay değil. Abel gruplarında basit temsiller homomorfizma olduğundan değerlerini matris olarak düzenleyebildik. Sıradaki yazılarımızda *grup karakterlerini* tanımlayacağız. Bu tanımla birlikte yukarıdaki matrisi *karakter tablosu* olarak adlandıracacağız.

Yukarıdaki sınıflandırmamızdan rahatlıkla yapılabilecek bir gözlemimiz var:

**Gözlem.** Abel grubu  $A$ 'nın basit temsillerinin sayısı  $A$ 'nın mertebesine eşittir.

Önceki sayfalarda basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin sayısını belirlemeyi hedeflemiştik. Yukarıdaki sonuç bu soruyu abel grupları için cevaplamış oldu. Abel olmayan gruplar için doğru olmayan bu sonucun genellemesini ilerleyen sayfalarda kanıtlayacağız.

Abel grupları için son bir sonuç daha bulalım. Abel grubu  $A$  verildiğinde  $\hat{A}$  ile  $A$ 'nın basit temsillerinin kümesini gösterelim. Fonksiyon toplamı altında  $\hat{A}$  da bir abel grubu olur. Daha açık olarak,  $\phi, \psi \in \hat{A}$  ve  $a \in A$  için,

$$(\phi + \psi)(a) = \phi(a) + \psi(a)$$

toplama işlemiyle  $\hat{A}$  bir abel grubudur.  $A$ 'nın *duali* olarak adlandırdığımız bu grubun yapısı  $A$  ile

eşyapılıdır. Bu sonucu iki adımda kanıtlayacağız.

**Önerme 3.** Her abel grubu  $A$  için  $A \cong \hat{A}$  izomorfizması doğrudur.

*Kanıt.* İlk olarak  $A = \langle a \rangle$ 'nin devirli olduğunu varsayalım. Yukarıda da gördüğümüz gibi,  $\hat{A} = \langle \phi_1 \rangle$  olur. Burada,  $A$ 'nın mertebesi  $n$  ve birimin ilkel  $n$ 'inci köklerinden biri  $\omega_n$  olmak üzere  $\phi_1 : a \mapsto \omega_n$  olarak tanımlıdır. Böylece  $\hat{A}$ 'nın da devirli olduğunu kanıtlamış oluruz. Yukarıdaki gözlemimizden bu iki devirli grubun mertebelerinin de eşit olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak  $A \cong \hat{A}$  bulmuş olduk.

Şimdi  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  devirli altgruplarının çarpımı olarak yazılmış bir abel grubu olsun. Önsav 1'i kullanırsak,

$$\hat{A} = \hat{A}_1 \times \hat{A}_2 \times \dots \times \hat{A}_k$$

buluruz. Ama ilk paragrafa göre her  $i$  için  $A_i \cong \hat{A}_i$  olmalı. Dolayısıyla hedeflediğimiz üzere,

$$\begin{aligned} \hat{A} &\cong \hat{A}_1 \times \hat{A}_2 \times \dots \times \hat{A}_k \\ &\cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \\ &= A \end{aligned}$$

olduğunu kanıtlarız.  $\square$

## Kaynaklar

Doğrusal cebir ve gruplar teorisi için dergimizde daha önce yayımlanan kapak konularını öneriyoruz.

1. Nesin, A., *Grup Teori, Matematik Dünyası*, 2013-2, <https://www.matematikdunyasi.org/2013/02/cebire-baslarken/>
2. Nesin, A., *Lineer Cebir, Matematik Dünyası*, 2014.

Sonlu grupların temsillerinin tarihi hakkında yazılmış çok sayıda kaynak var. Bu yazılarımızı hazırlarken faydalandığım iki makale ve bir kitap şöyle:

3. Curtis, C. W. (1999). *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer*. American Mathematical Society.
4. Lam, T. Y. (1999). *Representations of finite groups: A hundred years: I and II*, Notices of the AMS.

Son olarak, sonlu grup temsilleri kuramının temel kaynaklarını aşağıya listeliyorum. Yazılarda geçen sonuçların tümü bu kitaplarda bulunuyor. Yazım ve sunuş konusunda her birinden ayrı ayrı etkilendiğimdir. Bu yüzden yazı içinde ayrıca atıf yapmadım.

5. Alperin, J. L., Bell, R. B. (1995). *Groups and Representations*. Springer-Verlag.
6. Curtis, C. W., Reiner, I. (1988). *Methods of Representation Theory: With Applications to Finite Groups and Orders*. John Wiley & Sons.
7. Feit, W. (1967). *Characters of Finite Groups*. W. A. Benjamin, Inc, New York.
8. James, G., Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press.
9. Isaacs, I. M. (2006). *Character Theory of Finite Groups*. Dover Publications.
10. Serre, J. P. (1977). *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlag.
11. Webb, P., (2016). *A Course in Finite Group Representations*. Cambridge University Press.

Kaynaklar tabii ki bunlarla sınırlı değil. Konu hakkında yazılmış çok sayıda değerli kitap ve makale bulunuyor. Ayrıca bahsetmediğimiz modüler temsiller üzerine yazılmış kitaplar da listemizde yer almıyor. İlgili okuyucu anahtar kelimeleri kullanıp bu kaynaklara rahatça erişebilir.

# Grup Temsilleri: Karakterler

Olçay Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

## Tanım ve Temel Özellikler

Kompleks sayılar üzerindeki temsilleri çalışmanın analitik bir yolu da var. Şimdi bu analitik yöntemi tanımlayacağız. Her temsile *karakter* adını verdiğimiz bir fonksiyon atayacağız. Giriş yazımızda belirttiğimiz gibi aslında sonlu grup temsillerinin ilk ortaya çıkışı karakterlerle olmuştur. Karakterlerin temsilleri belirlediğini ve karakterleri belirlemenin  $\mathbb{C}G$ -modülleri belirlemekten daha kolay olduğunu göstereceğiz. Bu yazımızda da  $G$  sonlu bir grup, tüm vektör uzayları da sonlu boyutlu olacak.

$V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  ise bu modüle karşılık gelen temsil olsun.  $\rho$ 'nun ya da  $V$ 'nin karakteri,

$$\chi_V: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \text{Tr}(\rho(g))$$

ile tanımlanan fonksiyondur.

$\chi_V(1) = \dim_{\mathbb{C}} V$  boyutu  $\chi_V$ 'nin derecesi ya da boyutu olarak adlandırılır.

Burada  $\text{Tr}(\rho(g))$  ile  $\rho(g)$  doğrusal dönüşümünün izini (İng. trace) gösteriyoruz. Eğer  $V$ 'ye bir baz seçip  $\rho(g)$ 'nin bu baza göre matrisini yazarsak,  $\rho(g)$ 'nin izi bu matrisin köşegenindeki sayıların toplamına eşit olacaktır. Aynı sayı ayrıca  $\rho(g)$ 'nin özdeğerlerinin de toplamıdır. Gösteriminden de anlaşılacağı üzere, bu toplam baz seçiminden bağımsızdır.

**Örnek 1.** Örnekler yazımızda  $S_3$  grubu için tanımladığımız,

$$\phi: S_3 \rightarrow GL(2, \mathbb{C}), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temsili alırsak  $\chi_\phi$ 'nin üç değerini aşağıdaki tabloda görebilirsiniz.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & a & b \\ \hline \chi_\phi & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Karakterlerin temel özelliklerini kanıtlayıp girişte iddia ettiğimiz gibi temsilleri belirlediklerini

kanıtlayalım. Okumaya devam ettikçe doğrusal cebiri yoğun olarak kullandığımızı fark edeceksiniz. Bilgilerinizi tazelemek için web sayfamızda da sunduğumuz MD2014 yılı kapak konularına göz atabilirsiniz. Aşağıdaki teorem karakterlerin özelliklerini sıralıyor. Takibi kolay olması için maddeleri kanıtları araya alarak vereceğiz.

**Teorem 1.**  $\rho$ ,  $G$ 'nin bir temsili ve  $\chi = \chi_\rho$  ise  $\rho$ 'nun karakteri olsun. Ayrıca  $g, h \in G$  seçelim ve  $\chi(1) = k$  diyelim. Bu gösterimlerle,

- Eğer  $g$ 'nin mertebesi  $n$  ise  $\chi(g)$  birimin  $n$ 'inci köklerinin  $k$  tanesinin toplamı olarak yazılabilir.

*Kanıt.*  $g^n = 1$  olduğundan  $\rho(g)^n = \text{Id}_{k \times k}$  olmalı. Öyleyse  $\rho(g)$ 'nin özdeğerlerinin her biri  $x^n = 1$  denklemini sağlar, yani birimin  $n$ 'inci köklerinden olmalıdır.  $\square$

- $|\chi(g)| \leq \chi(1)$  eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu sadece ve sadece  $\rho(g)$  homomorfizması bir sabitle çarpım olarak verildiğinde sağlanır.

*Kanıt.* Birinci kısımdan  $\chi(g) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  yazabiliriz. Burada her bir  $\lambda_i$  birimin  $n$ 'inci köküdür. Öyleyse üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} |\chi(g)| &= |\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k| \\ &\leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_k| \\ &= k \end{aligned}$$

buluruz. İyi bilindiği üzere, üçgen eşitsizliğinde eşitlik sadece ve sadece tüm terimler birbirine eşitken sağlanır. Dolayısıyla yukarıda eşitlik olması için  $\rho(g)$ 'nin tüm özdeğerleri birbirine eşit olmalıdır. Buysa sadece ve sadece  $\rho(g)$ 'nin birim matrisin bir katı olmasıyla mümkündür.  $\square$

- $\chi(g) = \chi(1)$  eşitliği ancak ve ancak  $g \in \ker \rho$  ise sağlanır.

*Kanıt.* Eğer  $g \in \ker \rho$  ise kanıtlayacak bir şey yok,  $\rho(g) = \rho(1)$ 'dir. Diğer yönde  $\chi(g) = \chi(1)$  ise aynı zamanda  $|\chi(g)| = \chi(1)$  olur. Bir önceki kısımdan  $\rho(g) = \lambda \text{Id}_{k \times k}$  olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın izini hesaplırsak  $\chi(g) = \lambda k$  çıkar. Ama  $\chi(g) = k$  olarak verilmişti. Öyleyse  $\lambda = 1$  olmalıdır. Demek ki  $\rho(g) = \text{Id}_{k \times k}$  miş, yani  $g \in \ker \rho$  olur.  $\square$

4. Her kompleks sayı  $z$  için  $\bar{z}$  ile  $z$ 'nin eşleniğini gösterelim. O zaman  $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$  eşitliği sağlanır.

*Kanıt.* Bu eşitliği kanıtlamak için hatırlamamız gereken iki önerme var: (1) Eğer  $\lambda$  birimin  $n$ 'inci köküyse  $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$  eşitliği sağlanır. (2) Tersinir bir matrisin tersinin özdeğerleri matrisin özdeğerlerinin çarpımsal terslerine eşittir.

Bu iki sonucu teoremin birinci maddesiyle birleştirdiğimizde sonuç ortaya çıkar.  $\square$

5.  $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ . Bir diğer deyişle,  $\chi$  eşlenik sınıflarında sabit değer alır.

*Kanıt.* Kanıtın bu bölümü için aşağıdaki eşitliği hatırlayalım:  $A, B$  matrisleri verildiğinde,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

sağlanır. Bununla birlikte aşağıdaki hesabı yapabiliriz:

$$\begin{aligned} \chi(hgh^{-1}) &= \text{Tr}(\rho(hgh^{-1})) &= \text{Tr}(\rho((hg)h^{-1})) \\ &= \text{Tr}(\rho(hg)\rho(h^{-1})) &= \text{Tr}(\rho(h^{-1})\rho(hg)) \\ &= \text{Tr}(\rho(h^{-1}hg)) &= \text{Tr}(\rho(g)) \\ &= \chi(g) \end{aligned}$$

Hesabın adımlarını okuyucu rahatlıkla takip edebilecektir. Sadece iz fonksiyonunun yukarıdaki özelliğinin yanısıra  $\rho$ 'nun homomorfizma olduğu bilgisini de kullandığımızı belirtelim.  $\square$

6. Eğer  $\text{CG}$ -modüller  $V$  ve  $W$  izomorfikse karakterleri  $\chi_V$  ve  $\chi_W$  eşit olur.

*Kanıt.*  $V \cong W$  olduğunda bu modüllere karşılık gelen temsillerin denk olduğunu göstermiştik, yani  $\rho_V(g) = T \cdot \rho_W(g) \cdot T^{-1}$  eşitliğini her  $g \in G$  için sağlayan bir  $T$  matrisi vardır. Şimdi iki tarafın izini hesaplayıp istenen eşitliği elde ederiz.  $\square$

<sup>1</sup>Basit gruplar kendisi ve aşikâr altgrubu dışında normal altgrubu olmayan gruplardır. Basit modüllerde olduğu gibi, basit gruplar da tüm grupların yapıtaşlarıdır. Sonlu basit grupların bir listesini veren teoremi kanıtlamak matematikçilerin onlarca yılını almıştır. Tüm kanıtın yaklaşık 12.000 sayfa olduğu biliniyor.

Yukarıda listelediğimiz 6 önerme karakterlerin aslında özel fonksiyonlar olduğunu gösteriyor. 5'inci önermeyi kullanıp karakter tanımını güncelleyebilir ve karakterleri eşlenik sınıflarından kompleks sayılara giden fonksiyonlar olarak düşünebiliriz. Son maddede verilen önerme, modüllerin karakterlerinin izomorfizma sınıflarında sabit olduğunu veriyor. Bu başlangıçtaki iddiamızın yarısı. Diğer yarısını, yani karakterleri eşit olan modüllerin izomorfik olduğunu, ilerleyen sayfalarda kanıtlayacağız.

Karakter örneklerini de ayrı bir yazıda vereceğiz. Ancak okuyucuya örneklere bakmadan önce teoriyi biraz daha okumasını tavsiye ederiz.

Karakterlerin eşlenik sınıflarında sabit olma özelliğinden dolayı grupların eşlenik sınıfları da bizim için önem kazanmış oldu. Karakter örnekleri yazımızın başında bazı grupların eşlenik sınıflarını da hesaplayacağız.

Karakterler grup hakkında önemli bilgiler de barındırmaktadır. Karakterleri inceleyip normal altgruplar bulabiliriz. Hatta tüm normal altgrupları bulmak mümkün! Dolayısıyla sadece karakterleri inceleyip bir grubun basit<sup>1</sup> olup olmadığına karar verebiliriz.

Karakterleri düzenli bir biçimde incelemek üzere, tanımını aşağıda vereceğimiz, *karakter tabloları* kurarız.

1.  $V$  basit  $\text{CG}$ -modül ise  $V$ 'nin karakteri  $\chi_V$ 'ye indirgenemez karakter denir.
2.  $G$ 'nin karakter tablosu, sütunları  $G$ 'nin eşlenik sınıflarıyla ve satırları  $G$ 'nin indirgenemez karakterleriyle etiketlenmiş tablodur. Tablonun  $(i, j)$  girdisi  $i$ 'inci satırdaki indirgenemez karakterin  $j$ 'inci sütundaki eşlenik sınıfına ait bir elemanda hesaplanmasıyla bulunur.

Bu tanımla birlikte okuyucu örnekler yazımızın ilk örneği olan  $S_3$ 'ün karakter tablosunu inceleyebilir.

Kendimize iki yeni hedef belirleyeceğiz:

1. Örneklerden gözlemlenebileceği gibi karakter tabloları kare matrislerdir, yani indirgenemez karakter sayısı (ki bu sayı basit modüllerin sayısıdır) eşlenik sınıflarının sayısına eşittir.
2. Gözlenmesi zor olsa da karakter tablosunun satır ve sütunları birer diklik bağıntısını sağlar.

Bu iddiaları kanıtlamadan önce bilinen karakterlerden yeni karakterler üretme tekniklerine göz atacağız. İlk olarak karakterlerin toplama altında kapalı olduğunu gösterelim.

**Önerme 1.**  $V, W$   $\mathbb{C}G$ -modüller ve  $\chi_V, \chi_W$  karşılık gelen karakterler olsun. Öyleyse,

$$\chi_V + \chi_W = \chi_{V \oplus W}$$

eşitliği sağlanır. Başka bir ifadeyle, iki karakterin fonksiyon toplamı yine bir karakter olur.

*Kanıt.* İki modülün dolaysız toplamı  $V \oplus W$  üzerindeki  $G$  etkisinin, her  $g \in G$  ve  $(v, w) \in V \oplus W$  için,  $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$  eşitliğiyle verildiğini hatırlayalım. Eğer  $V \oplus W$ 'nin bazı  $V$ 'nin ve  $W$ 'nin bazlarını arka arkaya ekleyerek elde edersek,  $g$  etkisinin bu baza göre matrisi, köşegeninde  $g$ 'nin  $V$  ve  $W$  üzerindeki etkilerinin matrisleri olan blok köşegen matris olduğu kolayca görülür. Böylesi bir matrisin izi, köşegendeki matrislerin izlerinin toplamıdır.  $\square$

Yukarıdaki teoremin 4. maddesi bir karakteri  $g$ 'nin tersinde hesaplamanın, karakterin kompleks eşleniğini bulmaya denk olduğunu vermişti. Şimdi bu işlemle yeni bir karakter elde edebileceğimizi görelim.

**Önerme 2.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.  $V$ 'nin karakterini  $\chi$  ile gösterelim. Bu durumda,

$$\bar{\chi}: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \bar{\chi}(g)$$

fonksiyonu da  $G$ 'nin bir karakteridir.

*Kanıt.* Önermeyi kanıtlamak için karakteri  $\bar{\chi}$  olan bir  $\mathbb{C}G$ -modül bulmalıyız. Tabii eğer  $\chi$ 'nin bütün değerleri gerçelse kanıtlayacak bir şey yok! Diğer durum için,

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$$

vektör uzayını düşünelim. Doğrusal cebirde  $V^*$  uzayına  $V$ 'nin *duali* dediğimizi hatırlayalım. Şimdi  $V^*$ 'ı  $\mathbb{C}G$ -modül yapalım: Her  $g \in G$  ve  $v^* \in V^*$  için,

$$(g \cdot v^*)(u) = v^*(g^{-1} \cdot u) \quad (*)$$

etkisini alalım ve bu etkinin düzgün tanımlı olduğunu görelim. Sadece birleşme özelliğini kontrol edeceğiz. Daha kolay olan diğerlerini okuyucuya

birakıyoruz. Birleşme özelliğinin kanıtı için, yukarıdakilere ek olarak,  $h \in G$  olsun. Bu seçimle birlikte,

$$\begin{aligned} ((hg) \cdot v^*)(u) &= v^*((hg)^{-1} \cdot u) \\ &= v^*(g^{-1} \cdot (h^{-1} \cdot u)) \\ &= (g \cdot v^*)(h^{-1} \cdot u) \\ &= (h \cdot (g \cdot v^*))(u) \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla grup etkisi birleşme özelliğine sahiptir. Alıştırmalarla birlikte, bu özellik bize  $V^*$ 'ın bir  $\mathbb{C}G$ -modül olduğunu gösterir. Şimdi bu modülün karakterini hesaplayalım.  $(*)$  tanımından  $g$ 'nin  $V^*$  üzerindeki etkisinin  $g^{-1}$ 'in  $V$  üzerindeki etkisiyle verildiğini görebiliriz. Daha açık bir anlatımla, eğer  $V$ 'nin bazı  $\mathcal{B}$  ise  $V^*$  için  $\mathcal{B}$ 'nin duali olan  $\mathcal{B}^*$  dual bazını seçeriz. Bu durumda  $g$ 'nin  $V^*$  üzerindeki etkisinin  $\mathcal{B}^*$ 'a göre olan matrisi  $g^{-1}$ 'in  $\mathcal{B}$ 'ye göre olan matrisine eşit olacaktır. Sonuç olarak  $V^*$ 'ın karakterinin  $\chi_V$ 'nin kompleks eşleniği olduğunu kanıtlamış olduk.  $\square$

Yukarıda tanımladığımız etkiyle birlikte  $V^*$  modülüne  $V$ 'nin *eşleniği* denir. Benzer şekilde,  $\bar{\chi}$ 'ye de  $\chi$ 'nin *eşleniği* denir.

## Tensör Çarpımı ve Karakteri

Son olarak karakterlerin çarpımının da karakter olduğunu göstereceğiz. Bu amaç için modüllerin çarpımı olan *tensör çarpımını* tanımlamamız gerekli. Her ne kadar en genel tanımını özümsemek zor olsa da tensör çarpımı vektör uzayları söz konusu olduğunda oldukça kolay bir kurulumla karşılık geliyor. Şimdiki amacımız için yeterli olduğundan sadece bu özel durumu göz önüne alacağız.

Vektör uzayları  $V$  ve  $W$  ile karşılık gelen bazları  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ve  $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  verilsin. Bu iki vektör uzayının *tensör çarpımı*, bazı

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \{e_i \otimes f_j \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$$

semboller kümesi olan ve  $V \otimes W$  ile gösterilen vektör uzayıdır.

Bu tanımla birlikte  $V \otimes W$ 'nin elemanları,

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j$$

formunda yazılır. Bu gösterimde  $\lambda_{i,j}$ 'ler kompleks sayılardır.

Ayrıca  $v = \sum_i \mu_i e_i \in V$  ve  $w = \sum_j \nu_j f_j \in W$  ise,

$$v \otimes w := \sum_{i,j} \mu_i \nu_j e_i \otimes f_j$$

olarak tanımlanır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta  $V \otimes W$ 'nin tüm elemanlarının  $v \otimes w$  formunda olmayacağıdır. Örneğin,

$$e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$$

vektörünü yukarıdaki formda yazamayız. Ek olarak tanımdan kolayca görüleceği gibi,

$$\dim_{\mathbb{C}} V \otimes W = \dim_{\mathbb{C}} V \dim_{\mathbb{C}} W = mn$$

eşitliği sağlanır. Bunların yanı sıra tensör çarpımının değişmeli olduğunu da kanıtlayabiliriz:

$$V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto w \otimes v$$

fonksiyonu istenen izomorfizmayı verecektir. Son olarak 1 boyutlu uzay  $\mathbb{C}$ 'nin tensör çarpımı için birim eleman olduğunu belirtelim, yani

$$\mathbb{C} \otimes V \cong V$$

izomorfizması doğrudur.

Şimdi  $V$  ve  $W$ 'nin  $\mathbb{C}G$ -modüller olduğunu varsayalım. Bu durumda  $V \otimes W$ 'yu aşağıdaki etkiyle  $\mathbb{C}G$ -modül yaparız: Her  $g \in G$  ve  $e_i \otimes f_j \in V \otimes W$  için,

$$g \cdot (e_i \otimes f_j) = g \cdot e_i \otimes g \cdot f_j$$

olsun. Bazı üzerinde tanımladığımız bu etkiyi doğrusal olarak genişletirsek aradığımız modül yapısına erişiriz.

Tensör çarpımının karakterini bulmak için  $g \in G$ 'nin matrisine ihtiyacımız var.  $V$  ve  $W$ 'nin sıralı bazları verilmişti. Hesapları kolaylaştırmak üzere, bu bazların  $g$ 'nin etkisini köşegen yaptığımızı varsayalım.<sup>2</sup> Bu sıralamaları kullanıp  $V \otimes W$ 'nin yukarıda tanımladığımız bazı  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 'yi alfabetik olarak sıralayalım. Demek istediğimiz  $e_i \otimes f_j$  vektörünün sıralamada  $e_k \otimes f_l$ 'den önce gelmesi için ya  $i < k$  olacak ya da  $i = k$  ve  $j < l$  olacak. Örneğin  $e_1 \otimes f_1$  ilk elemanken  $e_1 \otimes f_n$  vektörü  $e_2 \otimes f_1$ 'den önce gelecek.

Bu sıralamaya göre ilk  $n$  satır ve sütunda ilk terim her zaman  $e_1$  iken ikinci terim  $f_1$ 'den  $f_n$ 'e kadar ilerler. Benzer şekilde  $j$ 'inci  $n$ 'li blokta ilk terim  $e_j$  iken ikinci terim  $f_1$ 'den  $f_n$ 'e kadar ilerler.

Tüm bunlarla birlikte  $g$ 'nin bu baza göre matrisi de köşegen olur. Eğer

$$g \cdot (e_i \otimes f_j) = \alpha_i \beta_j e_i \otimes f_j$$

yazarsak bu köşegen matrisin  $((i, j), (i, j))$  girdisi

<sup>2</sup>Doğrusal cebirden hatırlarsanız, bir matrisin karakteristik polinomunun tekrarlı kökleri yoksa bu matris köşegenleştirilebilir. Bizim durumumuzda  $\rho(g)$ 'nin karakteristik polinomunun,  $n$  sayısı  $g$ 'nin mertebesi olmak üzere,  $x^n - 1$ 'i bölmeceğini görmüştük. Dolayısıyla koşul sağlanır.

$\alpha_i \beta_j$  olur. Köşegen toplamını hesapladığımızda,

$$\begin{aligned} \chi_{V \otimes W}(g) &= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} \alpha_i \beta_j \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j \\ &= \chi_V(g) \chi_W(g) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Öyleyse aşağıdaki önermenin kanıtını tamamlamış olduk.

**Önerme 3.**  $V, W$   $\mathbb{C}G$ -modülleri ve  $\chi_V, \chi_W$  karşılık gelen karakterler olmak üzere  $\chi_V \chi_W$  bir karakterdir. Dahası,

$$\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$$

sağlanır.

Tensör çarpımının bir uygulamasını yapalım. Yukarıda dual modül tanımı yapmıştık. Bu tanımı bir adım ilerletebiliriz. Yine  $V, W$   $\mathbb{C}G$ -modüllerini alalım. Bu modüller arasındaki doğrusal dönüşümlerin kümesini  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  ile gösterelim. Dual uzay için  $W = \mathbb{C}$  almanız yeterli olur. Dual uzayda izlediğimiz yola benzer şekilde  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  uzayını da  $\mathbb{C}G$ -modül yapabiliriz. Bu amaçla her  $g \in G$ ,  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  ve  $v \in V$  için,

$$(g \cdot \phi)(v) = g \cdot \phi(g^{-1} \cdot v)$$

olsun. Daha önce  $W = \mathbb{C}$  durumunda da gösterdiğimiz gibi, verdiğimiz bu tanım bir grup etkisidir. Kanıtı rasgele bir  $W$  ve yukarıdaki etki için yeniden yazma görevini okuyucuya ödev olarak bırakıyoruz. Tanımımızın tensör çarpımıyla ilgisini aşağıdaki önerme veriyor.

**Önerme 4.**  $V, W$   $\mathbb{C}G$ -modüller ve  $\chi_V, \chi_W$  karşılık gelen karakterler olsun. O zaman,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \otimes W$$

$\mathbb{C}G$ -modül izomorfizması vardır. Dolayısıyla,

$$\chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)} = \bar{\chi}_V \chi_W$$

olur.

*Kanıt.* İkinci iddia ilkindeki izomorfizmayı ve Önerme 3'ü kullanarak bulunur. Öne sürülen izomorfizmayı kanıtlamak için gerekli fonksiyonu vermekle yetinelim. Teknik kanıt ilgili okuyucuya

birakacağız.

$$V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

□

### Simetrik ve Asimetrik Kareler

Tensör çarpımının bir diğer uygulamasını daha yapalım. Bu uygulama yeni karakterler ortaya çıkarmak için de oldukça kullanışlı olacak. Bir  $\mathbb{C}G$ -modül  $V$  alalım. Her doğal sayı  $n$  için  $V^{\otimes n} := V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  (çarpımda  $n$  tane terim var) çarpımının da bir  $\mathbb{C}G$ -modül olduğunu biliyoruz. Rasgele bir  $n$  için bu modülü parçalamak zor bir problem olsa da en küçük durumda, yani  $n = 2$  iken, aşağıdaki gibi bir parçalanış elde edebiliriz. Bu amaçla  $V$ 'nin vektör uzayı bazını  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  seçelim. Yukarıda verdiğimiz tanıma göre  $V^{\otimes 2} = V \otimes V$ 'nin bazı,

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} = \{v_i \otimes v_j \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

kümesi olacaktır. Şimdi,

$$T : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}, \quad v_i \otimes v_j \mapsto v_j \otimes v_i$$

eşleşmesinin doğrusal genişlemesi olan izomorfizmayı düşünelim.  $V$ 'nin simetrik karesi  $S^2(V)$ ,  $V^{\otimes 2}$ 'nin  $T$  altında sabit kalan elemanlarının uzayı olarak tanımlanır, yani

$$S^2(V) = \{x \in V^{\otimes 2} \mid T(x) = x\}.$$

Benzer şekilde, özdeğeri  $-1$  olan vektörlerin altuzayına  $V$ 'nin asimetrik karesi denir ve  $\Lambda^2(V)$  ile gösterilir, yani

$$\Lambda^2(V) = \{x \in V^{\otimes 2} \mid T(x) = -x\}.$$

Böylece,

$$\{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

kümesinin  $S^2(V)$  için,

$$\{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

kümesininse  $\Lambda^2(V)$  için birer baz olacağı aşikârdır. Ayrıca bu iki altuzayın kesişiminin  $0$  olduğu da kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$

elde etmiş oluruz.

Son olarak her iki altuzay,  $V^{\otimes 2}$  üzerindeki  $G$ -etkisi altında kapalıdır. Gerçekten de  $v \otimes w \in V^{\otimes 2}$  verildiğinde,

$$\begin{aligned} T(g \cdot (v \otimes w)) &= T((g \cdot v) \otimes (g \cdot w)) \\ &= (g \cdot w) \otimes (g \cdot v) \\ &= g \cdot (w \otimes v) \\ &= g \cdot T(w \otimes v) \end{aligned}$$

eşitlikleri iddiamızı  $S^2(V)$  için kanıtlar. Diğer kanıt benzer şekildedir. Okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz. Dolayısıyla yukarıda elde ettiğimiz parçalanış aynı zamanda  $\mathbb{C}G$ -modüllere parçalanıştır. Şimdi bu modüllerin karakterlerini  $\chi := \chi_V$  cinsinden hesaplayalım. Gösterimi sadeleştirmek üzere simetrik karenin karakterini  $\chi_S$ , asimetrik karenin karakteriniyse  $\chi_A$  ile göstereceğiz.

**Teorem 2.** Yukarıdaki gösterimle,

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2))$$

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2))$$

eşitlikleri sağlanır.

*Kanıt.* Simetrik ve asimetrik karelerin bazlarını yukarıda bulmuştuk. Şimdi  $G$  etkisinin bu bazlara göre matrislerini yazarsak karşılık gelen izleri belirleyebiliriz. Daha açık olarak,  $g \in G$  için, eğer  $g$ 'nin  $V$  üzerindeki etkisinin özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ise,

$$\chi_S(g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

ve

$$\chi_A(g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

eşitlikleri sağlanacaktır. Bunların yanı sıra,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}((\sum_i \lambda_i)^2 - \sum_i \lambda_i^2)$$

eşitliğinin sağlandığı da açıktır ve  $\chi_A$  için olan hesap tamamlanmış olur.  $\chi_S$ 'yiye  $\chi_S = \chi - \chi_A$  eşitliğinden çözebiliriz. □

Simetrik ve asimetrik kareleri kolay bir örnek üzerinde hesaplayalım. Kullanışlı bir uygulamayı *Karakter Tablosu Örnekleri* yazımızda bulabilirsiniz.

**Örnek 2.** Grubumuzu yine  $S_3$  olarak alalım. Kare-sini hesaplayacağımız modülse  $2$  boyutlu basit  $\mathbb{C}S_3$ -modül  $V$  olsun. Bu modülün tanımı *Örnekler* yazımızda bulunuyor. Aynı gösterimi takip edip  $V$ 'nin bazını  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$  seçelim. Bu seçimle birlikte  $V \otimes V$ 'nin sıralı bazı  $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$  olur. Beklediğimiz gibi  $V \otimes V$   $4$  boyutlu bir uzay oldu.

Şimdi yukarıdaki hesaba göre  $V$ 'nin simetrik karesi,

$$S^2(V) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$$

altuzayıken asimetrik karesi,

$$\Lambda^2(V) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\}$$

altuzayı olur.

Elde ettiğimiz  $3 \mathbb{C}S_3$ -modülün karakterlerini aşağıdaki tabloda bulabilirsiniz. Hesaplar için çarpım kuralını ve Teorem 2'yi kullandık.

$S_3$	1	$b$	$a$
$\chi_V$	2	0	-1
$\chi_{V \otimes V}$	4	0	1
$\chi_S$	3	1	0
$\chi_A$	1	-1	1

Tabloya baktığımızda  $\chi_A$ 'nın *Örnekler*'de tanımladığımız işaret homomorfizması olduğunu hemen görürüz. Diğer taraftan  $\chi_S$  aşikâr karakter ve  $\chi_V$ 'nin toplamına eşittir. Bu bilgileri bir araya getirdiğimizde, *Karakter Tablosu Örnekleri* yazımızdaki gösterimle,

$$\begin{aligned} \chi_{V \otimes V} &= \chi_S + \chi_A \\ &= \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \end{aligned}$$

buluruz.

## Diklik Bağlantıları

Yukarıda da sözünü ettiğimiz diklik bağlantılarını belirlemeye hazırız. İndirgenemez karakterlerin dikliğinden bahsetmek için önce bu karakterleri bir iç çarpım uzayının içinde görmeliyiz. İlk olarak bu uzayı tanımlayalım.

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu, her  $g, h \in G$  için  $f(hgh^{-1}) = f(g)$  eşitliğini sağlıyorsa  $f$ 'ye *sınıf fonksiyonu* denir.  $G$ 'nin tüm sınıf fonksiyonlarının kümesini  $\mathcal{C}(G)$  ile gösterelim.

Eğer  $CC(G)$  ile  $G$ 'nin eşlenik sınıflarının kümesini gösterirsek, sınıf fonksiyonlarını  $G \rightarrow \mathbb{C}$  yerine  $CC(G) \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonları olarak tanımlayabiliriz. Bu küme aşağıdaki işlemlerle bir vektör uzayı olacaktır:

1.  $e, f \in \mathcal{C}(G)$  ise  $(e + f)(g) = e(g) + f(g)$ ,
2.  $\lambda \in \mathbb{C}$  ise  $(\lambda e)(g) = \lambda e(g)$  olsun.

Tanımların vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını okuyucu kontrol edebilir. Bir diğer kolay özellik  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(G)$ 'nin  $G$ 'nin eşlenik sınıflarının sayısı olduğudur. Ayrıca ilk bölümde gösterdiğimiz gibi karakterler aynı zamanda sınıf fonksiyonu olduğundan  $\mathcal{C}(G)$ 'nin elemanlarıdır.

$$\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \subset \mathcal{C}(G)$$

Karakterleri içeren bir vektör uzayı inşa etmiş olduk. Şimdi bir iç çarpım tanımlayalım.

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{C}(G) \times \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

çarpımını,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g)$$

eşitliğiyle tanımlayalım.

Bu çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar. Özelliklerin kanıtları tanımın doğrudan uygulanmasıyla elde edildiğinden okuyucuya ödev olarak bırakıyoruz.

1. Her  $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{C}(G)$  ve  $a, b \in \mathbb{C}$  için,

$$\langle a\phi + b\psi, \chi \rangle = a \langle \phi, \chi \rangle + b \langle \psi, \chi \rangle$$

sağlanır.

2. Her  $\phi, \psi \in \mathcal{C}(G)$  için,

$$\langle \psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \psi \rangle}$$

olur.

3. Her  $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{C}(G)$  için,

$$\langle \phi\psi, \chi \rangle = \langle \phi, \psi^* \chi \rangle$$

olur.

4. Her  $0 \neq \phi \in \mathcal{C}(G)$  için  $\langle \phi, \phi \rangle$  bir pozitif gerçel sayıdır.

Bu özelliklerden 1, 2 ve 4'üncüsü  $\langle -, - \rangle$ 'nin bir iç çarpım olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan eğer keyfi sınıf fonksiyonları yerine karakterleri alırsak aslında  $\langle -, - \rangle$ 'nin simetrik olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten  $\chi, \phi$  birer karakterse,

$$\begin{aligned} \langle \chi, \phi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \phi(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \phi(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h^{-1} \in G} \chi(h) \phi(h^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h)\phi(h^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{\phi}(h)\chi(h) \\
 &= \langle \phi, \chi \rangle
 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu hesaplamayı yaparken  $\bar{\chi}(g) = \chi(g^{-1})$  olduğunu ve ayrıca indisleri değiştirirken  $g$  yerine  $g^{-1}$  almanın tüm  $G$  üzerinde dolaşmaya engel olmadığını kullandık. Öyleyse aşağıdaki sonucu da göstermiş olduk.

**Önerme 5.** Grup  $G$ 'nin karakterleri  $\chi$  ve  $\phi$  için,

$$\langle \chi, \phi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle$$

eşitliği sağlanır.

Artık ana sonuçlarımızdan birini kanıtlamaya hazırız.

**Teorem 3** (Satır dikliği).  $G$  sonlu grup,  $V, W$  basit  $\mathbb{C}G$ -modülleri ve  $\chi_V, \chi_W$  karşılık gelen indirgenemez karakterler olsun. O zaman,

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1, & \text{eğer } V \cong W \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

*Kanıt.* Daha önce,

$$\chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)} = \bar{\chi}_V \chi_W$$

olduğunu görmüştük. Ayrıca *Örnekler* yazımızdaki *Sabit Noktaların Altmodülü* bölümünde kanıtladığımız üzere,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$$

eşitliği de sağlanıyor. Dolayısıyla bu iki vektör uzayının boyutları birbirine eşit olmalı. *Örnekler* yazımızdaki hesabımızdan,

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G \\
 &= \chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \right) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)}(g) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_V(g) \chi_W(g) \\
 &= \langle \chi, \phi \rangle
 \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Diğer taraftan Schur'un Önsavı'ndan,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } V \cong W \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla teorem kanıtlanmış olur.  $\square$

Satır dikliğinin ilk uygulamasını basit modüllerle parçalama problemine yapacağız.  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  ile bütün  $\mathbb{C}G$ -modüllerin kümesini gösterdiğimiz hatırlayalım. Ayrıca  $\chi_i = \chi_{S_i}$  yazacağız ve gerektiğinde  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$  de yazacağız. Ayrıca  $V \oplus V$  dolaysız toplamını  $2V$  olarak yazıp, tümevarımla  $nV$  tanımını yapacağız. Bu gösterimde  $0V$ 'nin  $0$  modülünü temsil edeceğini de belirtelim.

**Sonuç 1.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun ve

$$V \cong n_1 S_1 \oplus n_2 S_2 \oplus \dots \oplus n_k S_k$$

yazalım. Bu durumda her  $i = 1, 2, \dots, k$  için,

$$n_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$$

olur. Özel olarak,  $n_i$ 'ler seçilen parçalanıştan bağımsızdırlar.

**Örnek 3.** Karakter Tablosu Örnekleri yazımızda  $S_3$ 'ün karakter tablosunu bulmuştuk. 2 boyutlu basit  $\mathbb{C}S_3$ -modüle karşılık gelen karakter  $\chi_3$  ile gösterilmişti. Şimdi  $V \otimes V$  modülünün karakterini indirgenemez karakterlerin toplamı olarak yazalım. Hatırlarsanız bu problemi simetrik ve asimetrik karelerle de çözmüştük.

Öncelikle  $\chi_{V \otimes V} = \chi_3^2$  olacak. Bu karakterlerin değerleri şöyle:

	1	a	b
$\chi_3$	2	1	0
$\chi_3^2$	4	1	0

Yukarıdaki sonucu kullanıp,  $a, b, c \in \mathbb{N}$  için,

$$\chi_3^2 = \alpha \chi_1 + \beta \chi_2 + \gamma \chi_3$$

yazabiliriz. Katsayıları iç çarpımla bulacağız.

$$\begin{aligned}
 \alpha = \langle \chi_3^2, \chi_1 \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in S_3} \chi_3^2(g) \chi_1(g) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_3^2(g) \\
 &= \frac{1}{6} (4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bu hesabımızda  $a$ 'nın eşlenik sınıfında 3,  $b$ 'ninse 2 eleman olduğunu kullandık. Benzer hesapla  $\beta = \gamma = 1$  bulunur. Dolayısıyla,

$$\chi_3^2 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

eşitliği elde edilir.

Sonunda karakterleri tanımlarken koyduğumuz bir diğer hedefe de ulaştık. Karakterlerle modüller arasındaki eşlemenin birebir olduğunu gösterebiliriz:

**Sonuç 2.** Her  $\mathbb{C}G$ -modül ikilisi  $V, W$  için,

$$V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$$

denkliği sağlanır. Sözlü olarak,  $\mathbb{C}G$ -modüller karakterleri tarafından biricik bir şekilde belirlenir.

*Kanıt.* Maschke'nin Teoremi'ni kullanıp,

$$V \cong \bigoplus_{S_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} m_i S_i \text{ ve } W \cong \bigoplus_{S_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} n_i S_i$$

yazalım. Bu gösterimde  $m_i$  ya da  $n_i$  0 olabilir ve bunun anlamı  $V_i$ 'ye izomorf bir altmodül bulunmaması olacak. Ayrıca izomorfik modüllerin karakterlerinin eşit olduğu sonucunu kullanıp her iki tarafın karakterlerini hesaplarsak,

$$\chi_V = \sum_{S_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} m_i \chi_i \text{ ve } \chi_W = \sum_{S_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} n_i \chi_i$$

eşitliklerini elde ederiz. Şimdi aşağıdaki denklemler doğrudur ve teoremin önermesini kanıtlar.

$$\begin{aligned} V \cong W &\Leftrightarrow \text{Her } i = 1, 2, \dots, k \text{ için } m_i = n_i \\ &\Leftrightarrow \text{Her } i = 1, 2, \dots, k \text{ için} \\ &\quad \langle \chi_V, \chi_i \rangle = \langle \chi_W, \chi_i \rangle \\ &\Leftrightarrow \chi_V = \chi_W. \end{aligned}$$

□

Bu sonuçla birlikte karakterlerle modülleri tam olarak eşlemiş ve modülleri çalışmanın karakterleri çalışmaya denk olduğunu görmüş olduk. Sıradaki sonucumuz basit olma durumunu karakterler cinsinden verecek.

**Sonuç 3.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül ve  $\chi$  bu modüle karşılık gelen karakter olsun.

1.  $\langle \chi, \chi \rangle$  her zaman pozitif bir tamsayıdır.

2. Aşağıdaki önermeler denktir.

(a)  $\chi$  indirgenemez karakterdir.

(b)  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  eşitliği sağlanır.

*Kanıt.* Kanıtımız iç çarpımın bir başka uygulaması olacak. Öncelikle her bir  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  olmak üzere  $\chi = \sum_{i=1}^k n_i \chi_i$  yazalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \sum_{i,j} n_i n_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle \\ &= \sum_i n_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k n_i^2 \end{aligned}$$

olur. Burada satır dikliğini iki kere kullandık. Sonuç olarak  $\langle \chi, \chi \rangle$  tamsayıların kareleri toplamı olduğundan pozitif bir tamsayıdır. Ayrıca bu toplamın 1 olmasının tek yolu sadece bir tane  $i$  hariç,  $i_0$  diyelim, tüm  $n_i$ 'lerin 0 ve  $n_{i_0} = 1$  olmasıyla mümkündür. Bu durumdaysa  $\chi = \chi_{i_0}$  indirgenemez olur. □

Yukarıdaki kriterin bir uygulamasını yapalım. Elde edeceğimiz sonuç aynı zamanda yeni karakterler üretmek için de kullanışlı olacak.

**Önerme 6.**  $\chi, \phi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ve  $\phi(1) = 1$  olsun. Bu durumda  $\phi\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  olur.

*Kanıt.* Herhangi iki karakterin çarpımının karakter olduğunu göstermiştik. Öyleyse yukarıdaki kriteri uygulayabiliriz, yani  $\chi\phi$ 'nin kendisiyle iç çarpımını hesaplamalıyız. Hesap aşağıda:

$$\begin{aligned} \langle \phi\chi, \phi\chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\phi\chi)(g) (\overline{\phi\chi})(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g) \overline{\phi}(g) \overline{\chi}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi}(g) \\ &= \langle \chi, \chi \rangle = 1 \end{aligned}$$

Üçüncü adımda  $\phi(1) = 1$  eşitliği sağlandığında  $\phi$ 'nin değerlerinin birimin kökü olduğu sonucunu kullandık ve  $\phi(g) \overline{\phi}(g) = 1$  bulduk. İç çarpımın sonucu 1 çıktığından, bir önceki sonuçtan dolayı,  $\phi\chi$ 'nin indirgenemez karakter olduğunu söyleyebiliriz. □

İndirgenemez karakterlerin kümesi  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 'nin elemanlarının birbirine dik olması bu kümenin sınıf fonksiyonları uzayında doğrusal bağımsız olduğunu

da gösteriyor. Eğer indirgenemez karakterlerin bu vektör uzayını gerdiğini de gösterebilirsek o zaman  $|\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(G)$  eşitliğini elde ederiz ve dolayısıyla  $G$ 'nin indirgenemez karakterlerinin sayısının  $G$ 'nin eşlenik sınıflarının sayısına eşit olduğunu buluruz. Bu amaca ulaşmak için herhangi bir sınıf fonksiyonunun indirgenemez karakterlerin doğrusal toplamı olduğunu göstermeliyiz. Aşağıdaki sonuç anahtar olacak.

**Önsav 1.** Grup  $G$ 'nin bir sınıf fonksiyonu  $f$ , basit modülü  $V$ , karşılık gelen temsili  $\rho = \rho_V$  ve karakteri  $\chi = \chi_V$  olsun. Ayrıca,

$$\rho_f : V \rightarrow V$$

homomorfizmasını

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Bu durumda,

$$\rho_f = \frac{|G|}{\chi(1)} \langle f, \bar{\chi} \rangle \text{Id}_V$$

olur.

*Kanıt.* Eğer  $\rho_f$ 'nin  $\mathbb{C}G$ -homomorfizması olduğunu gösterirsek Schur'un Önsavı'nı kullanıp  $\rho_f$ 'nin birim fonksiyonun katı olduğunu söyleyebiliriz. Bunun için  $\rho_f$ 'nin  $G$  etkisiyle değişmeli olduğunu göstereceğiz. Hesaplayalım: Her  $x \in G$  için,

$$\begin{aligned} \rho(x)\rho_f\rho(x^{-1}) &= \sum_{g \in G} f(g)\rho(x)\rho(g)\rho(x^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} f(g)\rho(xgx^{-1}) \\ &= \sum_{h \in G} f(x^{-1}hx)\rho(h) \\ &= \rho_f \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. Daha önce de kullandığımız değişken değiştirme taktiğini bir kere daha uyguladığımızı not edelim. Dolayısıyla, yukarıda bahsettiğimiz gibi,  $\rho_f = \lambda \text{Id}_V$  eşitliğini sağlayacak bir  $\lambda \in \mathbb{C}$  bulunur. Katsayıyı belirleyebilmek için her iki tarafın izini hesaplayalım. Sağ tarafın  $n \cdot \lambda$  olacağı açık. Öyleyse,

$$n \cdot \lambda = \text{Tr}(\rho_f) = \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) = |G| \langle f, \bar{\chi} \rangle$$

buluruz ki  $n = \chi(1)$  olduğundan önermemiz kanıtlanmış olur.  $\square$

Artık indirgenemez karakterlerin baz olduğunu göstermeye hazırız.

**Teorem 4.** İndirgenemez karakterler kümesi  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  grup  $G$ 'nin sınıf fonksiyonları uzayı  $\mathcal{C}(G)$ 'nin birim dikgen bazıdır.

*Kanıt.* Yukarıda  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 'nin birim dikgen (İng. orthonormal), dolayısıyla doğrusal bağımsız, olduğunu göstermiştik. Geriye sadece  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 'nin tüm uzayı gerdiğini göstermek kaldı.

Aksi durumda, yani  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 'nin gerdiği altuzay dışında bir eleman varsa bütün indirgenemez karakterlere dik olmalı. Öyleyse yapmamız gereken, eğer  $f \in \mathcal{C}(G)$  fonksiyonu her  $\chi_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  için  $\langle f, \chi_i \rangle = 0$  eşitliğini sağlıyorsa  $f = 0$  olduğunu göstermektir.

Şimdi  $f$ 'i her bir indirgenemez karaktere dik olacak şekilde seçelim. O zaman  $\langle f, \bar{\chi}_i \rangle = 0$  eşitliği de sağlanır. Bu durumda önceki önsavda tanımladığımız  $\rho_f$  homomorfizması da her basit modül  $V$  için 0 olacaktır. Dahası, Maschke'nin Teoremi'nden dolayı,  $\rho_f$ , basit olsun olmasın, her  $\mathbb{C}G$ -modül için 0 olacaktır.

Özel olarak,  $\rho$ 'yu düzenli  $\mathbb{C}G$ -modüle karşılık gelen temsil olarak seçelim. Böylece,

$$0 = \rho_f(1) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)(1) = \sum_{g \in G} f(g)g$$

buluruz. Burada düzenli modülün bazının grubun elemanları olduğunu ve ayrıca  $\rho(g)$ 'nin etkisinin soldan çarpma olduğunu kullandık. Ancak  $G$  kümesinin  $\mathbb{C}G$ 'ye baz olması aynı zamanda elemanlarının bu uzay içinde doğrusal bağımsız olduğunu da veriyor. Dolayısıyla eşitliğin sağlanması için  $f(g) = 0$  her  $g \in G$  için sağlanmalı, yani beklendiği gibi,  $f = 0$  olmalıdır.  $\square$

Bu teoremin bir sonucu olarak indirgenemez karakterlerin, dolayısıyla basit  $\mathbb{C}G$ -modüllerin sayısını da bulmuş olduk:

**Sonuç 4.**  $G$ 'nin indirgenemez karakterlerinin sayısı  $G$ 'nin eşlenik sınıflarının sayısına eşittir.

Özel olarak  $G$  abel grubu olduğunda eşlenik sınıflarının sayısı  $G$ 'nin mertebesi  $|G|$ 'ye eşit olduğundan, indirgenemez karakterlerin sayısı da grubun mertebesine eşittir. Bu sonuç bir önceki yazımızdaki sonuçla örtüşüyor!

Artık ikinci diklik bağıntısını da kanıtlayabiliriz. Karakter tablosu tanımını hatırlarsak, bu teorem tablonun sütunlarının birbirine dik olduğunu veriyor.

**Teorem 5** (Sütun Dikliği). Grup  $G$ 'nin elemanları  $g$  ve  $h$  için,

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(g)\bar{\chi}_i(h) = \begin{cases} |C_G(g)|, & \text{eğer } g =_G h \text{ ise,} \\ 0, & \text{değilse.} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıtın önce yeni bir gösterim tanıtalım. Eğer  $g, h \in G$  elemanları eşlenirse bu ilişkiyi  $g =_G h$  ile göstereceğiz.

*Kanıt.* Kanıtı biraz dolaylı yoldan yapacağız. Öncelikle  $h \in G$  için  $h$ 'nin eşlenik sınıfının karakteristik fonksiyonunu alalım:

$$f_h : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \begin{cases} 1, & \text{eğer } g =_G h \text{ ise,} \\ 0, & \text{değilse.} \end{cases}$$

Şimdi  $f_h$  bir sınıf fonksiyonu ve indirgenemez karakterler sınıf fonksiyonları için birim dikgen baz olduğundan,

$$f_h = \sum_{i=1}^k \langle f_h, \chi_i \rangle \chi_i$$

eşitliğini yazabiliriz. Katsayıları hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \langle f_h, \chi_i \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_h(g)\bar{\chi}_i(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{|G|}{|C_G(h)|} \chi_i(h^{-1}) \\ &= \frac{\chi_i(h^{-1})}{|C_G(h)|} \end{aligned}$$

Son eşitliği kullanıp,

$$\chi_i(h^{-1}) = |C_G(h)| \langle f_h, \chi_i \rangle$$

değerini elde ederiz. Şimdi her iki tarafı  $\chi_i(g)$  ile çarpalım ve  $\chi_i$  üzerinden toplayalım.

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(g)\chi_i(h^{-1}) = \sum_{i=1}^k \chi_i(g)|C_G(h)| \langle f_h, \chi_i \rangle$$

Eşitliğin sağ tarafını  $f_h$ 'nin açılımıyla karşılaştırsak  $|C_G(H)|f_h(g)$  olduğunu görürüz. Dolayısıyla, beklediğimiz üzere,

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(g)\chi_i(h^{-1}) = |C_G(H)|f_h(g)$$

olur. □

Daha önce basit  $CG$ -modüllerin boyutlarının kareleri toplamının grubun mertebesini verdiğini göstermiştik. Aynı sonucu sütunların dik olmasını kullanarak da bulabiliriz.

**Sonuç 5.**

$$|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} \chi(1)^2$$

*Kanıt.* Eşitliği elde etmek için Teorem 5'i  $g = h = 1$  durumunda kullanmak yeterlidir. □

## Grup Temsilleri: İki Teorem

Sonlu grup temsillerinin iki önemli uygulamasından giriş yazımızda söz etmiştik. Önermeleri sadece grup teori terimleriyle verilmesine karşın her iki teoremin de ilk kanıtları karakter teori kullanılmaktadır. Bu teoremleri, kanıtları olmaksızın sizlere sunuyoruz.

**Burnside'in  $p^\alpha q^\beta$ -Teoremi.**  $p, q$  asal sayılar ve  $\alpha, \beta$  doğal sayılar olmak üzere, mertebesi  $p^\alpha q^\beta$  olan her grup çözülebilirdir.

Burnside bu teoremi karakter teori kullanarak kanıtlamıştır. Detaylar için okuyucumuza [5, Sayfa 182]'yi öneriyoruz. 1970'lere kadar karakter teori kullanmayan bir kanıt bulunamamıştır. Grup teori kullanarak yapılan bir kanıt Isaacs'in *Finite Group Theory* kitabında sunulmaktadır. Diğer taraftan Froubeius'un aşağıdaki teoreminin hâlâ karakter

teori kullanmayan bir kanıtı bilinmemektedir.

**Frobenius'un Normal Tümlen Teoremi.**

$G$  sonlu grup,  $H$  ise her  $g \in G - H$  için  $H \cap {}^g H = \{1\}$  koşulunu sağlayan bir altgrup olsun. Bu durumda

$$N = G - \left( \bigcup_{g \in G} {}^g H - \{1\} \right)$$

kümesi  $G$ 'nin bir normal altgrupudur ve

$$G = HN, H \cap N = \{1\}$$

eşitlikleri sağlanır.

Bu teoremin bir kanıtı [5, Sayfa 172]'de bulunabilir. Her iki kanıtı takip edebilmek için okuyucularımızın bu sayıda yer veremediğimiz bazı teknikleri öğrenmesi gereklidir.

# Grup Temsilleri: Örnekler

Olca Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Bu yazımızda hem somut temsil örnekleri vereceğiz hem de sık kullanılan bazı kurulumları açıklayacağız. Örnekleri bir arada sunarak okuyucunun ihtiyaç duyduğunda bu örnekleri erişimini kolaylaştırmayı umuyoruz. Karakter ve karakter tabloları örneklerini bir sonraki yazımızda vereceğiz.

## Aşikâr Örnekler

Önce basit durumları aradan çıkaralım: Eğer  $G = \{1\}$  ise, yani bir elemanlı grupsa, her  $V$  için sadece bir tane temsil bulabiliriz. Gerçekten de her temsil  $\{1\} \rightarrow GL(V)$  formunda bir grup dönüşümü olmalı. Ama grup dönüşümleri birim elemanı birim elemana götürmek zorunda olduğundan, sadece bir tane dönüşüm, dolayısıyla bir tane temsil bulabiliriz. Hatırlarsanız, birim elemanın birim dönüşüm olarak etki etmesi gerektiğini de söylemiştik.

Bu örneği her grup için tekrarlamak mümkün. Şöyle ki  $G$  rasgele bir grup,  $V$  rasgele bir vektör uzayı ve  $\mathbb{B}_V : V \rightarrow V$  birim dönüşüm olmak üzere  $G \rightarrow V, g \mapsto \mathbb{B}_V$  bir temsildir.

$G$ 'nin her bir elemanın birim dönüşüm gibi etki ettiği temsile *aşikâr temsil* denir.

Mashcke'nin Teoremi'ni okuyan okuyucularımız aşikâr (temsillerin) modüllerin de basit modüllerin toplamı olarak yazılacağı sonucuna varacaktır. Aşikâr modülün her altmodülü de aşikâr olacağı için basit modüllere parçalanış 1 boyutlu vektör uzaylarına parçalanışa denktir. Bu sebepten dolayı, aksini belirtmedikçe, aşikâr modül dediğimizde sadece 1 boyutlu aşikâr modüle atıfta bulunuyor olacağız.

## Bir Boyutlu Temsiller

Sıradaki kolay durum için  $V$ 'yi basitleştirelim. En basit durumlardan birisi  $V$ 'nin boyutunun 1 olduğu durumdur; çünkü boyutu 1 olan karmaşık vektör uzayının simetri grubu sıfırdan farklı kompleks sayıların grubuna eşittir, yani

$$GL(V) \simeq \mathbb{C}^\times.$$

<sup>1</sup>Bir sayının tek/çift olma durumu için İngilizcede *parity* kelimesi kullanılır. Türkçede bu anlama gelebilecek güzel bir karşılık bulamadım.

Özel durumumuzda,  $V$ 'nin sıfır olmayan her elemanı aynı zamanda bir baz olacaktır. Dolayısıyla,  $0 \neq v \in V$  seçtiğimizde  $V = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$  yazabiliriz. Böylece yukarıdaki izomorfizmayı  $\omega \in \mathbb{C}^\times$  elemanını  $v \mapsto \omega v$  dönüşümüne götüren fonksiyon olarak belirlemiş oluruz. Şimdi kolayca görüleceği gibi,

$G$ 'nin  $V$  üzerindeki etkileriyle  $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  grup homomorfizmaları birebir eşlenir.

Bu eşlemeyi sıklıkla kullanacağımız için açık olarak da verelim. Öncelikle, 1 boyutlu temsil  $V$  verilsin. Sabitleyeceğimiz  $v \in V$  seçip  $V = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$  yazalım. Her  $g \in G$  için  $g \cdot v \in V$  olduğundan  $g \cdot v = \lambda_g v$  eşitliğini sağlayan bir  $\lambda_g \in \mathbb{C}$  bulunur. Bu sabitin sadece  $g$ 'ye bağlı olduğu açıktır. Öyleyse karşılık gelen homomorfizmayı,

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times, g \mapsto \lambda_g$$

biçiminde tanımlarız. Buna karşın, eğer bir homomorfizma  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  verilirse  $G$ 'nin 1 boyutlu  $V$  üzerindeki etkisini, her  $g \in G$  için,

$$g \cdot v = \varphi(g)v$$

eşitliğiyle tanımlarız. Bu iki fonksiyonun istediğimiz eşlemeyi üreteceğini okuyucu rahatlıkla kontrol edebilir!

Verilen bir grubun 1 boyutlu temsillerinin tümünü bulmak için bir teknik geliştireceğiz. Öncesinde bir örnek görelim.

Derecesi  $n$  olan simetrik grup  $S_n$  olsun. Bu grubun elemanlarının  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin permütasyonları olacağını hatırlayalım. Permütasyonlar kümesinin en temel özelliklerinden biri tek/çift olarak iki parçaya ayrılabilmesidir. Herhangi bir permütasyonun dahil olduğu parçayı belirlemek için önce bu elemanı ikili permütasyonların çarpımı olarak yazarız. Eğer çarpımda çift sayıda çarpan varsa permütasyona *çift permütasyon*, eğer tek sayıda çarpan varsa da *tek permütasyon* deriz.<sup>1</sup> Bu

atamaya birlikte

$$\sigma : S_n \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \pi \mapsto \begin{cases} 1 & \text{eğer } \pi \text{ çiftse} \\ -1 & \text{eğer } \pi \text{ tekse} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarız. Bu fonksiyonun grup dönüşümü olacağını göstermek zor değil, dolayısıyla  $S_n$ 'nin 1 boyutlu bir temsilini elde etmiş oluruz! Açık sebeplerden dolayı bu temsile *işaret temsili* denir.

Aslında  $S_n$ 'nin, 1 boyutlu aşikâr temsil ve işaret temsili olmak üzere 2 tane 1 boyutlu temsili vardır. Bu sonucu da ilerleyen sayfalarda kanıtlayacağız.

## Devirli Grupların Temsilleri

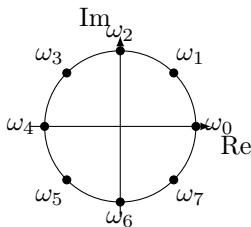
İnceleyeceğimiz sıradaki grup türü  $G$ 'nin devirli olduğu durum. Bu bölüm için  $G$  yerine  $C$  yazalım. Eğer  $C$ 'nin mertebesi  $n$  ise, o zaman  $C = C_n$  yazacağız. Buradaki kolaylık  $C$ 'den çıkan grup dönüşümlerini belirlemede yatıyor; çünkü  $G$  herhangi bir grupsa  $\phi : C \rightarrow G$  grup dönüşümünü belirlemek/tanımlamak için  $C$ 'nin herhangi bir üreticinin  $\phi$  altındaki değerini belirlemek/tanımlamak yeterlidir. Diyelim ki  $C = C_n = \langle c \rangle$ . O zaman,  $\phi(c) \in G$  elemanı,

$$1_G = \phi(1_C) = \phi(c^n) = \phi(c)^n$$

eşitliğini sağlayacağından  $\phi(c)$ 'nin mertebesi  $n$ 'yi bölmeli. Dikkatlice düşündüğümüzde  $\phi$ 'yi tanımlamak için başka bir koşula ihtiyacımız olmadığını görürüz.

Öyleyse  $C$ 'nin 1 boyutlu temsillerini bulmak için  $\mathbb{C}^\times$  grubunda mertebesi  $n$ 'yi bölen elemanları bilmemiz yeterli. Diğer taraftan  $\omega \in \mathbb{C}^\times$ 'nin mertebesinin  $n$ 'yi bölmesiyle  $\omega^n = 1$  eşitliği sağlanması birbirine denktir. Yani temsiller  $\omega^n = 1$ 'in kökleri tarafından belirlenir.

Bu denklemin kökleri iyi bilinir ve “birimin  $n$ 'inci kökleri” olarak adlandırılır. Denklemi çözmek için  $e^{2\pi i} = 1$  eşitliğini kullanırsak,  $\omega = e^{2\pi i/n}$ 'nin ve dolayısıyla her  $k = 0, 1, \dots, n-1$  için  $e^{2\pi ik/n}$ 'nin birimin  $n$ 'inci kökleri olduğu kolaylıkla görülür. Bu kompleks sayıların birbirinden farklı olduklarını göstermeyi de okuyucuya bırakalım. Geometrik olarak, tüm bu noktalar düzlemdeki birim çemberin üzerindedirler ve bir köşesi  $(1, 0)$  noktasında olan bir düzgün  $n$ -genin köşelerini oluştururlar. Aşağıda  $n = 8$  örneğini görebilirsiniz.



Şimdi  $\omega$  birimin  $n$ 'inci köklerinden biri olsun ve  $\phi_\omega : C \rightarrow \mathbb{C}^\times$  dönüşümünü  $c^k \mapsto \omega^k$  olarak tanımlayalım. Bu tanımla birlikte  $\phi_\omega$ 'nin  $C$ 'nin temsili olduğu açıktır. Böylece aşağıdaki sınıflandırmayı bulmuş oluruz.

**Teorem 1.**  $C = \langle c \rangle$  mertebesi  $n$  olan devirli grup olsun.  $C$ 'nin  $n$  tane 1 boyutlu temsili vardır ve bu temsiller,

$$\{\phi_\omega : C \rightarrow \mathbb{C}^\times, c \mapsto \omega \mid \omega^n = 1\}$$

olarak listelenir.

## Düşük mertebeden örnekler: $S_3$

Bu bölümde 6 elemanlı abel olmayan grubun temsillerini çalışacağız. Soyut hesaplarla, bu mertebede sadece bir tane abel olmayan grup olduğunu ve bu grubun aşağıdaki gibi verildiğini göstermek zor değil:

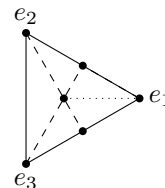
$$G = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

ve  $ba = a^2b$  eşitliği sağlanır. En düşük mertebeli abel olmayan grup olması dolayısıyla birçok soyut anlatımın temel örneği de bu gruptur.

Grup  $G$ 'yi elde etmenin iki farklı yolu daha vardır. İlki,  $G$ 'yi üç elemanlı bir kümenin permütasyonlarının grubu olarak elde etmekten, ikincisi,  $G$ 'yi eşkenar bir üçgenin simetrisinin grubu olarak tarif etmektir. Bu grupların 6 elemanlı olduğunu ve abel olmadığını gösterdiğimizde  $G$  ile izomorfik olduğu da ortaya çıkar. Genel gösterimleri takip edip  $G$  yerine  $S_3$  yazacağız ve *3. dereceden simetrik grup* olarak adlandıracamız.

Aslında bu yorumları yapmak  $S_3$  grubunun temsillerini bulmaya denktir. Aşağıda üçgen simetrisinden ortaya çıkan temsili de kuracağız.

Şimdi  $S_3$ 'ün indirgenemez temsillerini bulalım. Öncelikle boyutları 1 olan ve birinci bölümde tanımladığımız aşikâr temsil ile ikinci bölümde tanımladığımız işaret temsili indirgenemezdir. Bir diğer indirgenemez temsili bulmak için  $S_3$ 'ün 2 boyutlu uzaya olan etkilerinden birini inceleyeceğiz. Bu etkiyi kurmak için ağırlık merkezi orjinde ve bir köşesi  $(1, 0)$  noktasında olan (Şekil 1) eşkenar üçgeni düşünelim.



Şekil 1: Eşkenar üçgen.

Etkiyi daha net görebilmek için köşeleri  $e_1, e_2$  ve  $e_3$  olarak işaretledik. Ayrıca kenar ortayları da ekledik. Grubun etkisi bu üçgenin simetrilerinin  $V = \mathbb{C}^2$  uzayına genişlemelerinden türeyecek. Bunun için  $V$ 'nin bazını  $\{e_1, e_2\}$  olarak seçelim. Bu seçimle birlikte  $e_3 = e_1 + e_2$  olur. Böylece orijin etrafında  $2\pi/3$ 'lük dönmeyi bu baza göre,

$$R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisiyle,  $e_3$  köşesinden çıkan kenar ortay üzerinde yansımaysa,

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisiyle gösterebiliriz. Şimdi,

$$Y_3 \cdot R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (R_{2\pi/3})^2 \cdot Y_3$$

olduğundan aşağıdaki grup dönüşümü, dolayısıyla  $S_3$ 'ün 2 boyutlu bir temsili, tanımlanabilir.

$$\phi : S_3 \rightarrow GL(2, \mathbb{C}), \quad a \mapsto R_{2\pi/3}, \quad b \mapsto Y_3$$

**İddia.**  $\phi : S_3 \rightarrow GL(V)$  indirgenemezdir.

*Kanıt.* Etki edilen  $V$  uzayı 2 boyutlu olduğundan, eğer  $\phi$  indirgenebilir olsaydı  $V$ 'nin 1 boyutlu  $S_3$  etkisi altında sabit kalan bir altuzayı olurdu. Dolayısıyla böyle bir altuzay olmadığını kanıtlamak yeterli olacaktır.

Çelişki elde etmek için  $U = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset V$  altuzayının yukarıdaki şartı sağladığını varsayalım (yani  $U \subset V$  bir  $\mathbb{C}S_3$ -altmodül olsun). Bu durumda özel olarak,

$$a \cdot u = \lambda_a u, \quad \text{ve} \quad b \cdot u = \lambda_b u$$

eşitlikleri bazı kompleks sayılar  $\lambda_a, \lambda_b$  için sağlanmalıdır. Doğrusal cebir problemi olarak düşüldüğümüzde  $u$  vektörünün  $\phi(a) = R_{2\pi/3}$  ve  $\phi(b) = Y_3$  dönüşümlerinin ortak özvektörü olduğunu iddia ediyoruz.

Bu iddianın doğru olmadığını kolayca görebiliriz. Eğer  $u = (u_1, u_2)$  ise  $Y_3(u) = \lambda_b u$  olması için koordinatların eşitliği, yani  $u_1 = u_2$ , gereklidir. Bunun üzerine  $R_{2\pi/3}(u) = \lambda_a u$  eşitliği de sağlanmalı. Denklem olarak yazdığımızda önce  $\lambda_a = 1$ , sonra da  $2u_1 = u_1$  buluruz. Tek çözümün  $u_1 = 0$  olması  $\mathbb{C}S_3$ -altmodül bulamayacağımızı vermektedir.  $\square$

Son olarak  $S_3$ 'ün *standard temsili*ni tanımlayalım. Vereceğimiz tanımda 3 yerine  $n$  yazdığımızda  $S_n$ 'nin standard temsili elde ederiz.

Bazı  $\mathcal{E} = \{f_1, f_2, f_3\}$  olan 3 boyutlu kompleks vektör uzayı  $U$  olsun. Bu uzay üzerindeki  $S_3$  etkisini indisleri karıştıracak şekilde tanımlayalım, yani her  $\tau \in S_3$  ve  $f_i \in \mathcal{E}$  için,

$$\tau \cdot f_i = f_{\tau(i)}$$

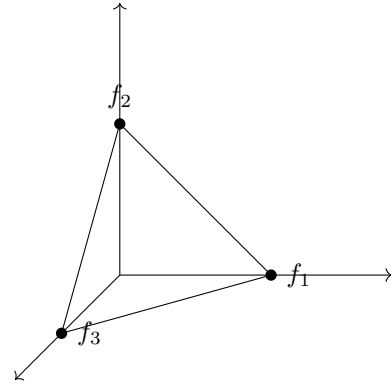
olsun. Burada  $S_3$ 'ü  $\{1, 2, 3\}$  kümesinin permutasyonları olarak düşünüyoruz. Yukarıdaki etkiyi doğrusal olarak  $U$ 'ya genişlettiğimizde,

$$\tau \cdot (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3) = \lambda_1 f_{\tau(1)} + \lambda_2 f_{\tau(2)} + \lambda_3 f_{\tau(3)}$$

dönüşümünü ve dolayısıyla  $S_3$ 'ün 3 boyutlu,

$$\sigma : S_3 \rightarrow GL(U)$$

temsili elde etmiş oluruz. Bu temsile *standard temsil* diyeceğiz. Geometrik olarak, köşeleri  $f_1, f_2, f_3$  olarak işaretlenmiş bir eşkenar üçgeni Şekil 2'de görüldüğü gibi 3 boyutlu koordinat sistemine yerleştirirsek, elde ettiğimiz temsilin bu üçgene kısıtlaması  $S_3$ 'ün üçgen üzerindeki etkisine karşılık gelecektir.



Şekil 2

**İddia.**  $\sigma$  indirgenebilir.

*Kanıt.* Bu iddiayı kanıtlamak için 1 boyutlu  $\mathbb{C}S_3$ -altmodül bulacağız. Bu amaçla, bir önceki örnekte olduğu gibi,  $G$  etkisi altında sabit kalan bir doğruya ihtiyacımız var. Bir diğer deyişle, öyle bir  $u \in U$  bulmalıyız ki her  $\tau \in S_3$  için,

$$\tau \cdot u = \lambda_\tau u$$

eşitliği bir  $\lambda_\tau \in \mathbb{C}$  için sağlansın. Aslında bu örnek için böyle bir  $u$  bulmak zor değil. Grup etkisi indisleri karıştırdığı için  $u = f_1 + f_2 + f_3$  aldığımızda koşul sağlanır. Dolayısıyla  $u$ 'nun gerdiği bir boyutlu altuzay  $\sigma$ 'nın bir altmodülüdür.  $\square$

## Düşük Mertebeden Örnekler: $D_8$

8 elemanlı dihedral grup  $D_8$  düzlemdeki bir karenin simetrilerinin grubudur. İki eleman tarafından gerilir:

$$\begin{aligned} D_8 &= \langle s, t \mid s^4 = t^2 = 1, tst = s^3 \rangle \\ &= \{1, s, s^2, s^3, t, st, s^2t, s^3t\} \end{aligned}$$

Bu gösterimde  $s$ 'yi kareyi merkezi etrafında  $\pi/2$  kadar döndürme,  $t$ 'yi ise seçilip sabitlenen bir köşegen üzerinde yansıtma olarak alabiliriz.

Dihedral grup  $D_8$ 'in bütün temsillerini daha sonra belirleyeceğiz. Öncelikle diğer yazımızda da kullanacağımız bir temsili tanıtalım. Yukarıdakine benzer bir düşünceyle, grubun karenin simetrileri olmasını kullanacağız. Buna göre,

$$\rho : D_8 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

fonksiyonunu,

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} := S \text{ ve } \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} := T$$

eşitliklerinden türeyen fonksiyon olarak tanımlayalım. Tanımımızın bir temsil olması için  $\rho$ 'nun grup dönüşümü olması, yani grup çarpmasını koruması gerekli. Bunu kontrol etmek için 3 şartı göz önüne almalıyız:

$$S^4 = 1, \quad T^2 = 1, \quad TST = S^3.$$

Yukarıdaki eşitliklerde sağda görünen 1 ile  $2 \times 2$  boyutlarındaki birim matrisi göstermekteyiz. Şartların sağlandığı okuyucu tarafından kolayca gösterilebilir.

**İddia.** Yukarıda tanımladığımız temsil,

$$\rho : D_8 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

indirgenemezdir.

*Kanıt.* Önceki bölümde olduğu gibi bu iddiayı kanıtlamanın yolu da  $D_8$  etkisi altında sabit kalan bir doğru olmadığını göstermektir. Çelişki elde edebilmek için böyle bir doğru olduğunu varsayalım ve  $u$  bu doğrunun üzerindeki sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda,

$$S \cdot u = \lambda_S u \quad \text{ve} \quad T \cdot u = \lambda_T u$$

denklemlerini sağlayan kompleks sayılar  $\lambda_S$  ve  $\lambda_T$  vardır. Yine doğrusal cebirden hatırlarsak, yukarıdaki eşitlikler  $u$ 'nun  $S$  ve  $T$ 'nin ortak özvektörü olduğunu vermektedir.

Öyleyse  $D_8$  etkisi altında sabit kalan bir doğru olmadığını göstermek için  $S$  ve  $T$ 'nin (sıfır olmayan) ortak özvektörü olmadığını göstermek yeterli olacaktır. Boyut düşük olduğundan doğrudan işlem yapacağız. Vektör  $u$ 'nun koordinatları  $\alpha$  ve  $\beta$  olsun. İlk olarak,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

sağlanmalıdır. Matris çarpmasını yaptığımızda,

$$\alpha = \lambda_T \alpha \quad \text{ve} \quad \beta = -\lambda_T \beta$$

buluruz. İki denklemin birden sağlanması için tek seçeneğin  $\alpha = 0$  ya da  $\beta = 0$  olması olduğu aşikârdır. Diğer taraftan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

eşitliği de sağlanmalı. Bir kere daha çarpma yapıp  $\beta = \lambda_S \alpha$  ve  $\alpha = -\lambda_S \beta$  eşitliklerini elde edebiliriz. Ama önceki eşitlikler  $\alpha$  ya da  $\beta$ 'yi sıfır olmaya zorlamıştı. Bu bilgiyi kullandığımızda son denklemlerden  $\alpha = \beta = 0$  çıkar, yani aradığımız  $u \neq 0$  vektörü aslında yoktur!  $\square$

## Yarı-basit Olmayan Bir Modül

Bu bölümde yarı-basit olma durumunun her zaman geçerli olmadığını bir örnekle kanıtlayacağız. Maschke'nin Teoremi'nden bu örnek için kompleks sayılar cismini, yani kompleks vektör uzaylarını kullanamayacağımızı biliyoruz. Dolayısıyla karakteristiği  $p > 0$  olan bir cisim üzerinde çalışacağız. Bu tür vektör uzayları konusunda tecrübesi olmayan okur biraz daha dikkatli olmalı. Doğrusal cebirle elde edilecek bir çok sonucunun bu durumda da geçerli olduğunu belirtelim.

Cisimler teorisinden bildiğimiz gibi, her  $p$  asal sayısı için,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  kümesi mod  $p$ 'de toplama ve mod  $p$ 'de çarpma altında bir cisim oluşturur. Bu cisimi  $\mathbb{F}_p$  ile gösterelim. Gerekli bir bilgi olmasa da dikkatinizi çekmek için ekleyelim: Karmaşık sayılar üzerindeki sonlu boyutlu vektör uzaylarından farklı olarak, sonlu boyutlu  $\mathbb{F}_p$  vektör uzayları sonlu sayıda vektör içerir!

Şimdi  $\mathbb{V} = \mathbb{F}_p^2$  ile 2 boyutlu  $\mathbb{F}_p$ -vektör uzayını gösterelim. Temsilleri tanımlamak için vektör uzaylarının tersinir doğrusal dönüşümlerinin grubuna ihtiyacımız var. Kompleks durumda olduğu gibi,  $GL(\mathbb{V})$  ile göstereceğimiz bu grup elemanlarını girdileri  $\mathbb{F}_p$ 'den olan  $2 \times 2$  matrislerin grubuyla izomorftur.

Bu vektör uzayına etkisini düşüneceğimiz grup  $p$ . mertebeden devirli grup  $C_p = \langle x \rangle$  olsun. Aslında

$C_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  denkleğinin sağlandığını hatırlatalım. Grup etkisini, her  $j = 0, 1, \dots, p - 1$  için,

$$C_p \rightarrow GL(\mathbb{V}), \quad x^j \mapsto \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Bu eşlemenin bir grup dönüşümü verdiğini kanıtlayalım. Fonksiyonun tanım kümesi bir devirli grup olduğundan tek yapmamız gereken görüntüdeki matrisin  $p$ 'inci kuvvetinin birim matrisi olduğunu göstermek. Basit çarpma işlemiyle,

$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & kj(mod p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Eğer  $k = p$  seçersek sağdaki matrisin birim matris olacağı açıktır, yani koşul sağlanır.

Tanımlamamızda dikkat etmemiz gereken önemli bir nokta var: Eğer cismimizin karakteristiği  $p$  olmasaydı, çarpma işlemindeki mod  $p$  kaybolacaktı. Bu durumda  $pj$  sıfırdan farklı olduğundan, hiçbir  $k$  değeri için sağ üst köşede 0 bulmamız mümkün olmazdı. Yani matrisimizin mertebesi  $p$  olamayacağı gibi tanımladığımız fonksiyon da homomorfizma olamazdı! Bir diğer deyişle, elde ettiğimiz modül gerçekten de  $\mathbb{F}_p$  cismine ve  $C_p$  grubuna özel!

**İddia.**  $\mathbb{V}$  yarı-basit değildir.

*Kanıt.* Kanıtlamamız gereken iki önerme var:

1.  $\mathbb{V}$  basit değildir, yani  $0$ 'dan ve  $\mathbb{V}$ 'den farklı bir altmodülü vardır.
2.  $\mathbb{V}$ , sıfırdan farklı iki altmodülünün dolaysız toplamı olarak yazılamaz.

$\mathbb{V}$ 'nin boyutu 2 olduğundan, eğer varsa, aşikâr olmayan öz-altmodülleri 1 boyutlu olmalı. Dolayısıyla  $\mathbb{V}$ 'nin basit olmadığını görmek için 1 boyutlu altmodül bulmamız gerekli ve yeterlidir. Yukarıdaki örneklerde gördüğümüz gibi böyle bir altmodül grubun tüm elemanlarının görüntüleri için ortak bir özvektör olmalıdır.  $C_p$ 'nin etkisini yukarıdaki matrisler cinsinden veren  $\mathbb{V}$ 'nin bazını  $\{v_1, v_2\}$  olarak yazalım. O zaman her  $j$  için,

$$x^j \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

elde ederiz, yani  $v_1$  aradığımız ortak özvektördür. Birinci önermeyi kanıtlamış olduk.

İkinci önerme için, eğer  $\mathbb{V}$  yarı-basit olsaydı, halihazırda 1 boyutlu altmodülü olduğundan, mecburen iki tane 1 boyutlu altmodülünün toplamı olarak yazılırdı. Bir diğer deyişle, birbirinden doğrusal olarak bağımsız en az iki ortak özvektör olurdu.

Öyleyse yukarıda bulduğumuzun dışında ortak özvektör olmadığını göstermemiz  $\mathbb{V}$ 'nin yarı-basit olmadığını kanıtlamak için yeterli olur. Bu amaçla,  $v = av_1 + bv_2 \in \mathbb{V}$  herhangi bir özvektör olsun:

$$x^j \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

sağlanırdı. Matris çarpımını hesaplarsak,

$$a + jb = \lambda_j a \quad \text{ve} \quad b = \lambda_j b$$

denklemlerinin her  $j = 0, 1, \dots, p - 1$  için sağlanması gerektiğini buluruz. İkinci denklem  $\lambda_j = 1$  verdiğinden, ilk denklemin sağlanması için gerek ve yeter koşulun  $b = 0$  olduğu ortaya çıkar. Ancak bu durumda  $v = (a, 0) = a \cdot (1, 0) = av_1$  olur. Böylece 1 boyutlu yegâne altmodülün  $v_1$ 'in gerdiği altmodül olduğunu görmüş oluruz. Kanıt tamamlandı.  $\square$

## Düzenli $CG$ -modül ve Permütasyon Modülleri

Grup temsilleri elde etmenin yollarından biri de grupların kümeler üzerine olan etkilerini doğrusal olarak vektör uzaylarına genişletmektir. Bu kurulunun ilk ve en önemli örneği düzenli modüldür (İng. regular module). Tüm modüller hakkında değerli bilgiler barındıran bu kurulumu gözden geçireceğiz.

Grup  $G$  verildiğinde bazı  $G$  kümesi olan  $\mathbb{C}$ -vektör uzayı  $CG$ 'yi tanımlayabiliriz: Vektörlerimiz  $\lambda_g$ 'ler kompleks sayılar olmak üzere,

$$\sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g$$

olarak yazılır. Vektör uzayı  $CG$ 'yi  $CG$ -modül yapmak için  $G$ 'nin etkisini *soldan çarpma* olarak tanımlamak yeterlidir, yani  $g' \in G$  ise,

$$g' \cdot \left( \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g \right) = \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g'g$$

olur. Elde ettiğimiz bu temsile  $G$ 'nin *düzenli temsili* ya da *düzenli  $CG$ -modül* denir. Düzenli modül aynı zamanda sadık modüldür.

Buradaki fikrimiz için önemli nokta  $G$ 'nin vektör uzayına olan permütasyon etkisidir. Bu olduğu sürece aynı kurulumu yapmak mümkün. O zaman  $X$  bir  $G$ -kümesi olsun, yani üzerinde  $G$ 'nin etkisi olan bir küme olsun. Bu etkiyi  $g \cdot x$  şeklinde yazarız. Eğer  $\mathbb{C}X$  bazı  $X$  ile verilen vektör uzayıysa,  $G$ 'nin  $\mathbb{C}X$  üzerindeki etkisini,

$$g \cdot \left( \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x \right) = \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot g \cdot x$$

olarak tanımlarız. Bu etkiyle birlikte ortaya çıkan yapıya bir *permütasyon modülü* denir.

Yukarıda  $S_3$  için tanımladığımız standart modüller permütasyon modüllere bir örnektir.

Karakter hesaplarında kullanışlı olacak bir gözlemi de okuyucumuzla paylaşalım. Permütasyon  $\mathbb{C}G$ -modül  $\mathbb{C}X$ 'e karşılık gelen temsili,

$$\rho_X : G \rightarrow GL(\mathbb{C}X)$$

ile gösterirsek, her  $g \in G$  için  $\rho(g)$ 'nin  $X$  bazındaki matrisi bir permütasyon matrisi olur, yani  $[\rho(g)]_X$ 'in her satır ve her sütununda sadece bir tane sıfırdan farklı girdi vardır ve bu girdi 1'e eşittir. Kanıtı okuyucuya bırakıyoruz!

### Sabit Noktaların Altmodülü

$V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.  $V$ 'nin  $G$  etkisi altında sabit kalan elemanlarının kümesini  $V^G$  ile gösterebiliriz. yani

$$V^G = \{v \in V \mid \text{her } g \in G \text{ için } g \cdot v = v \text{ sağlanır.}\}$$

Bu kümenin bir altuzay hatta  $G$ 'nin aşikâr etki ettiği en büyük altuzay olduğu barizdir.

**Örnek 1.** İki  $\mathbb{C}G$ -modül  $V$  ve  $W$  seçelim. Önceki yazılarımızda  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  ve  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$  notasyonlarını üretmiştik. Henüz bu notasyonu görmeyen okurlar bu örneği atlayıp sonrasındaki ön-sava bakabilir. Bu örneğin amacı aşağıdaki eşitliği kanıtlamak olacak.

**İddia.**  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G = \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ , yani  $V$ 'den  $W$ 'ya giden  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizmaları bu iki vektör uzayı arasındaki doğrusal dönüşümlerin  $G$ -etkisi altındaki sabit noktalarıdır.

Gerçekten de  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  verildiğinde aşağıdaki denklemler açık bir biçimde sağlanır.

$$\begin{aligned} \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) &\Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için} \\ &\quad \phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v) \\ &\Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için} \\ &\quad g^{-1} \cdot \phi(g \cdot v) = \phi(v) \\ &\Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için} \\ &\quad g \cdot \phi(g^{-1} \cdot v) = \phi(v) \\ &\Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için} \\ &\quad (g \cdot \phi)(v) = \phi(v) \\ &\Leftrightarrow \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G \end{aligned}$$

Yukarıdaki adımları açıklayalım. İlk denklik  $\mathbb{C}G$ -modül olmanın tanımı. İkinciye ulaşmak için eşitliğin her iki tarafına  $g^{-1}$  ile etki ettik. Elde ettiğimiz bu denklik  $G$ 'nin bütün elemanları için doğru

olduğundan,  $g$  yerine  $g^{-1}$  yazdığımızda da doğru olacaktır. Sonraki denkleği bu değişikliği yaparak bulduk. Bu kez oluşan eşitliğin sol tarafı  $g \cdot \phi$ 'nin tanımı oldu. Eşitliğin sağında  $\phi$  bulunduğu için  $\phi$ 'nin  $G$  etkisi altında sabit kaldığı sonucuna ulaştık.

Sıradaki sonucumuz sabit noktaların boyutunu hesaplamamız için bir yöntem üretiyor.

**Önerme 1.**  $V$  bir  $\mathbb{C}G$ -modül olsun.

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v$$

eşitliğiyle tanımlanan  $\pi : V \rightarrow V$  fonksiyonu bir  $V^G$  altuzayına izdüşüm olan bir  $\mathbb{C}G$ -modül homomorfizmasıdır. Dahası,

$$\dim_{\mathbb{C}} V^G = \text{Tr}(\pi)$$

eşitliği sağlanır.

*Kanıt.* Yukarıda tanımlanan  $\pi$  fonksiyonunun doğrusal olduğu ve  $G$  etkisiyle değişmeli olduğu açıktır. Dolayısıyla bir  $\mathbb{C}G$ -homomorfizmasıdır. Sabit noktalara izdüşüm olduğunu görmek için kanıtlamamız gereken iki önerme var.

İlk olarak,  $\pi$ 'nin görüntüsündeki her vektör  $G$  etkisi altında sabit olmalı. Gerçekten de eğer  $h \in G$  verilirse,

$$\begin{aligned} h \cdot \pi(v) &= h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (hg) \cdot v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} (hg) \cdot v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \\ &= \pi(v) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada daha önce de kullandığımız  $g \in G$  indisini  $hg \in G$  ile değiştirme numarasını bir kere daha kullandık.

İkinci olarak,  $\pi$ 'nin sabit noktalar üzerinde birim fonksiyon olduğunu göstermemiz gerekli. Eğer  $v \in V^G$  ise, yani her  $g \in G$  için  $g \cdot v = v$  ise toplamda görünen tüm terimler  $v$ 'ye eşit olacaktır. Toplamda  $|G|$  tane terim olduğundan toplam  $\frac{1}{|G|}|G|v = v$  olur.

Önermenin ikinci iddiası doğrusal cebirde bilinen bir sonuçtur: İz düşüm fonksiyonunun izi görüntüsünün boyutuna eşittir.  $\square$

## Grup Temsilleri:

## Karakter Tablosu Örnekleri

Olcay Coşkun

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Karakter tabloları oluşturmak bir taraftan grubun yapısını çözümlenememize yardımcı olurken bir taraftan da eğlenceli olabilir. Bu yazımızda temel karakter tablosu örneklerini sunacağız. Başlangıçtaki örneklerimiz temel teknikleri kullanırken ilerleyen örneklerimizde diklik bağlantıları gibi daha ileri teknikleri de kullanacağız. *Örnekler* yazımızda olduğu gibi, bu yazının da konuyu tartıştığımız ana yazıya paralel olarak okunmasını tavsiye ederiz.

## Karakter Tablosu Bulma Teknikleri

Yazımıza karakter tablolarını bulmak için kullanabileceğimiz teknikleri listeleterek başlayalım. Örneklerle büyük bölümünün kullanımını da göstereceğiz.

$G$  sonlu grup olsun.

- $G$ 'nin indirgenemez karakterlerinin sayısı  $G$ 'nin eşlenik sınıflarının sayısı eşittir. Dolayısıyla karakter tablosu kare matristir.

Bu en temel sonuçlarımızdan birisidir. İlk adım olarak grubun eşlenik sınıflarını belirleyip tablo-muzun boyutuna karar vereceğiz.

- $G$ 'nin 1 boyutlu temsillerinin hepsi  $G/G'$  grubunun 1 boyutlu temsillerinden  $\text{Inf}_{G/G'}^G$  fonksiyonuyla elde edilir.
- $|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} \chi(1)^2$ .

Yukarıdaki iki sonucu kullanıp 1 boyutlu karakterleri belirler ve sonrasında geri kalan çok boyutlu temsillerin boyutları hakkında fikir elde edebiliriz. Bu sayıda kanıtlayamadığımız, ama listeye dahil edeceğimiz aşağıdaki sonuç, olası dereceleri önemli ölçüde kısıtlamaktadır.

- Her  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  için  $\chi(1)$  boyutu  $|G|$  mertebesini böler.

Bu önermenin kanıtını yapabilmek için cebirsel sayıların tanımına ve temel özelliklerine ihtiyaç duyduğumuzdan, kanıtı bu sayıda veremedik. Aşağıdaki örneklerde de çok gerekmedikçe kullanmaya çalışacağız.

- $G$ 'nin matematiksel bir nesneye ya da kümeye olan her etkisi bir  $\mathbb{C}G$ -modül üretir.

Karakterleri modüllerden elde etmek özellikle mertebesi yüksek gruplar için kolay değildir ancak her zaman permutasyon modülleri ve onların karakterlerini kullanmak mümkündür. Çoğu zaman indirgenemez temsil bulamayız ancak aşağıdaki teoremler aracılığıyla bulduğumuz bu karakterlerin içinden indirgenemez terimler çıkarabiliriz.

- $\chi$ ,  $G$ 'nin bir karakteriyse,

$$\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1$$

İndirgenemez karakterlerin bu niteliği pratikte en sık kullanılan özelliklerden birisidir. Çeşitli yollarla elde edilen bir karakter için ilk adım, her zaman, kendisiyle iç çarpımını hesaplamaktır. Karakter indirgenebilir olduğunda da her bir indirgenemez karakterdeki koordinatını benzer bir çarpımla buluruz.

- $\chi$ ,  $G$ 'nin bir karakteri ve  $\chi_i \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ise  $\chi$ 'nin  $\chi_i$  koordinatı  $\langle \chi, \chi_i \rangle$ 'dir.

Bu iki sonucu kullanıp yeni indirgenemez karakterler bulmak mümkün olsa da çoğu zaman birkaç indirgenemez karakterin toplamı da ortaya çıkar. Bu gibi durumlarda diğer yöntemlerle başka karakterler bulunmalı.

Sıradaki iki sonuç karakter tablosunun satırlarının ve sütunlarının dik olduğunu veriyor. Eğer tabloyu kurarken son bir satır ya da son bir sütun kalırsa bu iki sonucu kullanıp tabloyu tamamlamak mümkündür.

8. (Satur Dikligi)  $\chi, \chi' \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  olsun.

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi' \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}(g) \chi'(g) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{eğer } \chi = \chi' \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } \chi \neq \chi' \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

9. (Sütun Dikligi)  $g, h \in G$  olsun.

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)} \bar{\chi}(g) \chi(h) = \begin{cases} |C_G(g)|, & g =_G h, \\ 0, & \text{değilse.} \end{cases}$$

Bölüm gruplarının temsillerini kullanmak da etkin bir yöntemdir. Sadece 1 boyutlu değil çok boyutlu indirgenemez karakterler de elde edilebilir.

10.  $N \trianglelefteq G$  ve  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G/N)$  olsun.

$$(\text{Inf}_{G/N}^G \chi)(g) = \chi(gN)$$

ile tanımlanan fonksiyon  $G$ 'nin indirgenemez karakteridir.

Kompleks sayı değerli bir karakterin eşleniğinin dual modülün karakteri olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla değerleri gerçel sayı olmayan her indirgenemez karakter eşlenik alma yoluyla yeni bir indirgenemez verir.

11.  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ise  $\bar{\chi} \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  olur.

Bunun yanı sıra iki karakterin çarpımının da bir karakter olduğunu kanıtlamıştık. Çoğu zaman indirgenemez karakter ortaya çıkmasa da yukarıdaki tekniklerle bildiğimiz karakterlerin koordinatlarını belirleyip yeni indirgenemezler üretebiliriz. Çarpımlardan birinin derecesi 1 olduğunda indirgenemez karakter elde ettiğimizi hatırlayalım.

12.  $\chi, \chi' \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ise  $\chi\chi'$   $G$ 'nin bir karakteridir. Dahası eğer  $\chi(1) = 1$  ise  $\chi\chi' \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  olur.

Son olarak simetrik ve asimetrik kareleri kul-lanıp yeni karakterler üretmek mümkündür. Son-rasında yukarıda tarif ettiğimiz yöntemlerle indirgenemez karakterlerin koordinatları belirlenebilir.

13.  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \chi_S(g) &= \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)) \\ \chi_A(g) &= \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)) \end{aligned}$$

eşitlikleri  $G$ 'nin karakterlerini verir.

Listelediğimiz bu teknikler dışında da yöntemler tabii ki var. Aslında en etkin yöntemlerden birini, (İng. Induction), bu yazılarımızda tanıtmadık. Konu üzerinde yoğunlaşmak isteyen okuyucular referans listemizdeki kitaplarda bu tekniği ve daha fazlasını bulabilir.

## Abel Grupları

Abel gruplarının basit temsillerinin bir boyutlu olması gerektiğini ve dolayısıyla her birinin gruptan sıfırdan farklı kompleks sayılar grubuna homomorfizmalar olması gerektiğini göstermiştik. Eğer  $A$  bir abel grubu ve  $\rho: A \rightarrow \mathbb{C}^\times$  bir homomorfizmaysa  $\rho$ 'nun karakterinin kendisine eşit olacağı da aşikârdır. Dolayısıyla  $A$ 'nın karakter tablosu sadece bu homomorfizmaların değerlerinden oluşacak. Aslında *Abel Grupları* yazımızda verdiğimiz  $V_4$  örneği aynı zamanda  $V_4$ 'ün karakter tablosuydu.

Bir temel örnek daha verip abel gruplarını tamamlayalım:  $A = C_4 = \langle x \rangle$  olsun. Daha önce de gördüğümüz gibi  $A$ 'dan çıkan homomorfizmalar  $x$ 'teki değerleri tarafından belirlenir ve bu değer, birimin 4. köklerinden biri olmalıdır. Öyleyse  $C_4$ 'ün karakter tablosu aşağıdaki gibi olacak.

$C_4$	1	$x$	$x^2$	$x^3$
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	$i$	-1	$-i$
$\chi_3$	1	-1	1	-1
$\chi_4$	1	$-i$	-1	$i$

## Düşük Mertebeden Örnekler: $S_3$

Abel olmayan en düşük mertebeli grup  $S_3$  grubudur. Bu grubun modüllerini ayrıntılı olarak bulmuştuk. Karakterler için eşlenik sınıflarına ihtiyacımız var.

Gruplar teorisinden hatırlarsanız, simetrik gruplarda iki elemanın eşlenik olması için bu elemanların döngü tiplerinin aynı olması gerek ve yeter koşuldu. Döngü tipleriye,  $S_n$  için,  $n$ 'nin tam sayı parçalanışlarıyla bulunur.

Dolayısıyla,  $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$  parçalanışları,  $S_3$ 'ün 3 tane eşlenik sınıfı olduğunu verir: Birim elemanından oluşan 1, 2'li döngülerin sınıfı  $b$  ve 3'lü döngülerin sınıfı  $a$ .

Bir önceki yazımızda basit  $CS_3$ -modülleri belirlemiştik. Okuyucu bu örneğe dönüp aşağıdaki tabloyu çıkarmayı denemelidir.

$S_3$	1	$b$	$a$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1
$\chi_3$	2	0	-1

### Düşük Mertebeden Örnekler: $D_8$

Öncelikle eşlenik sınıflarını belirleyelim.

$$D_8 = \{1, s, s^2, s^3, t, st, s^2t, s^3t\}$$

olduğunu hatırlayalım. Ayrıca  $tst = s^3$  eşitliğimiz de vardı. Bu eşitlik bize  $s$  ve  $s^3$ 'ün eşlenik olduğunu veriyor. Bir de,

$$ts^2t = (tst)(tst) = s^3s^3 = s^2$$

eşitlikleri  $s^2$ 'nin merkezde olduğunu dolayısıyla sadece kendisiyle eşlenik olduğunu gösteriyor.

Geriye sadece  $s^4t$  formundaki elemanlar kaldı. Aşağıdaki hesaplara bakalım:

$$t(st)t = ts = s^3t,$$

$$s(st)s^3 = s^2ts^3 = ts^5 = ts = s^3t$$

Görülebileceği gibi hem  $t$  hem de  $s$  ile eşlenik alma  $st$ 'yi  $s^3t$  yapıyor. Öyleyse bu iki eleman bir eşlenik sınıfı oluşturur. Son olarak  $t$  için hesap yapalım.

$$st(t)st = st^2st = s^2t$$

Bu eşitlik  $t$  ile  $s^2t$ 'nin eşlenik olduğunu gösteriyor. Böylece eşlenik sınıflarını belirlemiş olduk.

$$CC(D_8) = \{\{1\}, \{s^2\}, \{s, s^3t\}, \{t, s^2t\}, \{st, s^3t\}\}$$

Karakter tablosunun üst satırı şöyle görünecek:

$D_8$	1	$s^2$	$s$	$t$	$st$
-------	---	-------	-----	-----	------

Şimdi 1 boyutlu karakterleri bulalım. Daha önce de kanıtladığımız üzere  $D_8$ 'in değişimleyen alt grubunu belirlememiz gerekli. Yukarıdaki hesaplarda  $Z(D_8) = \{1, s^2\}$  bulduk. Ayrıca  $|D_8/Z(D_8)| = 4$  olduğundan bu bölüm abel olmalı.  $D_8$  abel olmadığından,  $Z(D_8)$ , bölümü abel veren en küçük alt gruptur, dolayısıyla aynı zamanda değişimleyen alt gruptur. Temel grup teorisi kullanıp  $D_8/Z(D_8) \cong V_4$  izomorfizmasını göstermeyi başka bir alıştırmaya bırakalım. Bölüm grubunun karakter tablosu aşağıdaki gibi olacak:

$D_8/D_8'$	$1D_8'$	$sD_8'$	$tD_8'$	$stD_8'$
$\phi_1$	1	1	1	1
$\phi_2$	1	1	-1	-1
$\phi_3$	1	-1	1	-1
$\phi_4$	1	-1	-1	1

Bu karakterlerin  $D_8$ 'e taşınmalarıyla aşağıdaki kısmi tabloyu elde ederiz.

$D_8$	1	$s^2$	$s$	$t$	$st$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	1	-1	1	-1
$\chi_4$	1	1	-1	-1	1

Tabloda  $\chi_i = \text{Inf}_{D_8/D_8'}^{D_8} \phi_i$  gösterimini kullandık. Son karakter bir önceki yazıda bulduğumuz 2 boyutlu basit  $CD_8$ 'in karakteri olacak. Geri dönüp ilgili matrislerin izleri hesaplanabilir. Alternatif olarak, diklik bağıntılarını kullanalım. Son karaktere  $\chi_5$  diyelim. Öncelikle grubun mertebesi indirgenemez karakterlerin derecelerinin kareleri toplamı olduğundan  $\chi_5(1) = 2$  olmalıdır.

Şimdi sütun dikliğini kullanırsak, 1. ve 2. sütunların dik olması için,

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \chi_5(s^2) = 0$$

olmalı. Dolayısıyla  $\chi_5(s^2) = -2$  buluruz. Sonraki üç sütunda da benzer hesaplar yapabiliriz. Bu kez, 1. sütunla 3., 4. ya da 5. sütunun çarpımını hesapladığımızda, ilk dört terimin toplamı 0 olduğundan  $\chi_5$ 'in bu sütunlardaki değerinin de 0 olması gerekir. Böylece temsillere ve matrislere hiç atıfta bulunmadan, son karakterin tüm değerlerini bulmuş olduk. Karakter tablosunun tamamı aşağıdaki gibi olacak.

$D_8$	1	$s^2$	$s$	$t$	$st$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	1	-1	1	-1
$\chi_4$	1	1	-1	-1	1
$\chi_5$	2	-2	0	0	0

Okuyucumuz bu sonucu matrislerle onaylamayı alıştırmaya bırakalım.

### Düşük Mertebeden Örnekler: $Q_8$

8 elemanlı abel olmayan diğer grubu, birim kuaterniyonların grubu  $Q_8$ 'i de inceleyelim. Elemanların listesi:

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

Bu elemanlar,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ ve } ij = k, jk = i, ki = j$$

eşitliklerini sağlar. Grubun merkezi ve değişimleyen  $\{1, -1\}$  elemanlarından oluşan ve mertebesi 2 olan alt gruptur. Kolayca hesaplanacağı üzere

diğer eşlenik sınıfları  $i, -i, j, -j, k, -k$  kümelerinden oluşur. Dolayısıyla  $D_8$ 'de olduğu gibi 5 tane indirgenemez karakter bulunur.

Ayrıca merkezine bölümünü hesapladığımızda  $Q_8/Q'_8 \cong V_4$  elde ederiz. Bu durumda, yine  $D_8$ 'de olduğu gibi,  $Q_8$ 'in 1 boyutlu karakterleri de  $V_4$  grubundan gelmektedir. Öyleyse ilk 4 karakter bu gruplar için ortak olacak.

Diğer taraftan  $D_8$ 'in karakter tablosunun son satırını sadece diklik bağıntılarını kullanarak bulmuştuk. Tamamen aynı hesaplar  $Q_8$  için de geçerli olduğundan  $Q_8$ 'in karakter tablosunun son satırı da  $D_8$ 'inkiyle aynı olacaktır! Öyleyse bu iki grubun karakter tabloları aynıdır!

$Q_8$	1	-1	$i$	$j$	$k$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	1	-1	1	-1
$\chi_4$	1	1	-1	-1	1
$\chi_5$	2	-2	0	0	0

Bu sonuç bize karakter tablolarının grupların izomorfizma sınıflarını belirlemeye yetmediğini göstermektedir.

### Düşük Mertebeden Örnekler: $S_4$

4 elemanlı  $\{1, 2, 3, 4\}$  kümesinin permütasyonlarının grubu  $S_4$ 'ün karakterlerini belirleyelim. Yine ilk olarak eşlenik sınıflarına ihtiyacımız var. Yukarıda da kullandığımız sonuca göre  $S_4$ 'ün eşlenik sınıflarının temsilcilerini şöyle sıralayabiliriz:

$$1, (12), (12)(34), (123), (1234)$$

Örnekler yazımızda da belirttiğimiz gibi, 1 boyutlu sadece iki karakter var. Biri aşikâr karakter, diğeri ise işaret karakteri olacak. Daha sonra kullanabilmek için kısmi karakter tablosunu oluşturalım.

$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_1$	1	1	1	1	1
$\sigma_2$	1	-1	1	1	-1

Şimdi  $S_3$  için de tanımladığımız standart temsili düşünelim.  $S_4$ 'ün bazı  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  olan 4 boyutlu uzay üzerindeki etkisini alacağız. Bu etki baz elemanlarımızın indislerini karıştırarak veriliyordu. Amacımız bu etkinin karakteri  $\sigma_s$ 'yi belirlemek. Öncelikle  $\sigma_s(1) = 4$  olacak.

$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_s$	4				

Sonrasında (12) permütasyonuna karşılık gelen matrisin izini bulalım. Bu eleman  $e_1$ 'le  $e_2$ 'yi değiştirirken  $e_3$  ve  $e_4$ 'ü sabit bırakacak. Dolayısıyla

etkinin matrisi 3. ve 4. köşegende 1 diğer köşegenlerde 0 olan bir matris olacak. Bu matrisin izi 2 olur. Yani,

$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_s$	4	2			

bulduk. Dikkat ederseniz, bu tür permütasyon etkilerinde karşılık gelen matrisin izi her zaman permütasyonun sabit bıraktığı eleman sayısı olacaktır. Örneğin (12) sadece iki elemanı, 3 ve 4'ü sabit bırakır. Bu gözlemlerle birlikte karakterin diğer değerlerini kolayca bulabiliriz.

$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_s$	4	2	0	1	0

Bulduğumuz temsilin indirgenemez olup olmadığını iç çarpımı kullanarak bulabiliriz. Bunun için eşlenik sınıflarının eleman sayılarına da ihtiyacımız var. Bu sayılar ya da seçtiğimiz eşlenik sınıf temsilcilerinin merkezleyenlerinin mertebeleri, karakter tablolarında ek bir satır olarak verilir. Biz ilk bilgiyi ekleyelim.

$[[g]]$	1	6	3	8	6
$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_s$	4	2	0	1	0

En üst satırda gördüğümüz sayıları bulmak zor değil. Örneğin (12) formundaki permütasyonları bulmak için  $\{1, 2, 3, 4\}$  kümesinden 2 elemanı 12 farklı yolla seçebiliriz, ancak  $(12) = (21)$  olduğundan yalnızca 6 farklı permütasyon elde ederiz. Diğer sayılar için de benzer akıl yürütmeler yapabilirsiniz.

Artık  $\sigma_s$ 'nin kendisiyle iç çarpımını hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_s, \sigma_s \rangle &= \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \sigma_s(g) \overline{\sigma_s(g)} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \sigma_s(g)^2 \\ &= \frac{1}{24} (1 \cdot 4^2 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0) \\ &= \frac{1}{24} (16 + 24 + 8) = 2 \end{aligned}$$

Sonucun 2 olması  $\sigma_s$ 'nin 2 tane indirgenemez karakterin toplamı olduğunu gösteriyor. Elimizdeki 1 boyutlu karakterlerden birinin  $\chi_s$  içinde görünüp görünmediğini hesaplayalım. Yine iç çarpım hesabı yapacağız.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_s, \sigma_1 \rangle &= \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \sigma_s(g) \overline{\sigma_1(g)} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \sigma_s(g) \\ &= \frac{1}{24} (1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) \\ &= \frac{1}{24} (4 + 12 + 8) = 1 \end{aligned}$$

Şanslıyız!  $\sigma_s$ 'yi oluşturan indirgenemezlerden birisi aşikâr karaktermiş. Öyleyse  $\sigma_4 = \sigma_s - \sigma_1$  yeni bir indirgenemez olacak. Yeni, çünkü boyutu 3! Tablomuz ekleyelim.

$ C_G(g) $	1	6	3	8	6
$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_1$	1	1	1	1	1
$\sigma_2$	1	-1	1	1	-1
$\sigma_4$	3	1	-1	0	-1

Yöntem listemizin 12. maddesine göre  $\sigma_2\sigma_4$  indirgenemezdir. (12) permütasyonundaki değeri  $\sigma_4$ 'ten farklı olduğundan  $\sigma_5 = \sigma_2\sigma_4$  yeni bir indirgenemez karakterdir. Böylece listemiz hemen hemen tamamlandı.

$ C_G(g) $	1	6	3	8	6
$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_1$	1	1	1	1	1
$\sigma_2$	1	-1	1	1	-1
$\sigma_4$	3	1	-1	0	-1
$\sigma_5$	3	-1	-1	0	1

Okuyucu  $\sigma_5$ 'i veren  $CS_4$ -modülü merak ediyorsa,  $S_4$ 'ün küpün simetrilerinin grubu olduğunu hatırlatalım. Bu etkiyi 3 boyutlu uzaya genişlettiğimizde ortaya çıkan modülün karakteri  $\sigma_5$  olacak. İlgili okuyucumuzu matrisleri yazıp bu iddiamızı kanıtlamaya davet ediyoruz.

Böylece son karaktere ulaşmış olduk! Bir önceki örnekte olduğu gibi son karakteri sütun dikliğini kullanarak bulabiliriz. Öncelikle bulduğumuz karakterlerin derecelerinin kareleri toplamı 20 olduğundan geriye kalan karakterin 2 boyutlu olduğunu söyleyebiliriz, bu karakteri  $\sigma_3$  olarak adlandıralım. Sütun dikliğini kullanıp diğer değerleri belirlemeyi ise okuyucuya alıştırmaya bırakacağız. Karakter tablomuzun son durumu aşağıda.

$ C_G(g) $	1	6	3	8	6
$S_4$	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sigma_1$	1	1	1	1	1
$\sigma_2$	1	-1	1	1	-1
$\sigma_3$	2	0	2	-1	0
$\sigma_4$	3	1	-1	0	-1
$\sigma_5$	3	-1	-1	0	1

### 60. Mertebeden Basit Grup: $A_5$

Yukarıdaki temel örneklerden sonra, göreceli olarak biraz daha zor bir örnek yapalım. Abel olmayan basit gruplardan en küçüğü olan  $A_5$ 'in karakter tablosunu kuracağız. Kendisi ve  $\{1\}$  dışında normal altgrubu olmadığı için  $A_5$ 'in sadece bir adet 1 boyutlu temsili vardır. Ayrıca bölüm gruplarından gelen temsilleri de düşünmemiz mümkün değil.

İşimizi zorlaştıran bu etkenlere karşın karakter tablosunu kurabileceğiz. *Induction* yöntemini bilseydik  $A_5$ 'in karakterlerini altgrupların karakterlerinden çekmemiz mümkün olabilirdi.

Öncelikle eşlenik sınıflarını belirlememiz gerekli. Yazıyı daha fazla uzatmamak için birçok grup teorisi kitabında bulunabilecek bu adımı atlıyoruz. Karakter tablomuzun ilk iki satırı ve aşikâr karakteri şöyle olacak:

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1

İlk olarak standart temsili ve karakterini hesaplayalım. Standart temsil için  $A_5$ 'in bazı  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  olan 5 boyutlu uzaya etkisini düşünüyoruz. Bu etki  $\alpha \in A_5$  için  $\alpha \cdot e_i = e_{\alpha(i)}$  eşitliğiyle veriliyor. Daha önce de gözlemlediğimiz gibi, bu temsilin karakteri  $\sigma_s$  elemanların sabit bıraktığı baz elemanı sayısına eşittir. Dolayısıyla,

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\sigma_s$	5	2	1	0	0

olur. Yine her zaman doğru olacağı gibi,  $\sigma_s$ 'nin  $\chi_1$ 'deki koordinatı 1'dir. Dolayısıyla  $\chi_4 := \sigma_s - 1$  tanımlayabiliriz. Yine okuyucuya bırakacağımız bir hesap:

$$\langle \chi_4, \chi_4 \rangle = 1$$

Bir diğer deyişle,  $\chi_4$  indirgenemezdir. Böylece karakter tablomuz bir satır daha eklemiş oluruz.

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_4$	4	1	0	-1	-1

Sıradaki karakteri belirlemek için simetrik kareleri kullanalım.  $\chi_s$  ile  $\chi_4$ 'ün simetrik karesini göstereyim. Yazının başında verdiğimiz formülden hesaplırsak,

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_s$	10	1	2	0	0

buluruz. Bu karakterin indirgenebilir olduğu açık! İçinde bildiğimiz karakterleri barındırdığını umarak iç çarpımları hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \langle \chi_s, \chi_1 \rangle &= \frac{1}{60} \sum_{g \in G} \chi_s(g) \\ &= \frac{1}{60} (10 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_S, \chi_4 \rangle &= \frac{1}{60} \sum_{g \in G} \chi_S(g) \chi_3(g) \\ &= \frac{1}{60} (1 \cdot 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1 \cdot 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Şanslıyız ki daha önceden bulduğumuz her iki karakter  $\chi_S$  içinde görülüyor. Bu iki karakteri çıkaracağımızda elde ettiğimiz sonuç,

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi'_S$	5	-1	1	0	0

Son olarak bu karakterin indirgenemez olup olmadığını kontrol edelim.

$$\begin{aligned} \langle \chi'_S, \chi'_S \rangle &= \frac{1}{60} \sum_{g \in G} (\chi'_S(g))^2 \\ &= \frac{1}{60} (1 \cdot 5^2 + 20 \cdot (-1)^2 + 15 \cdot 1^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Şansımız devam ediyor!  $\chi_5 = \chi'_S$  olarak tanımlayıp tablomuza ekleyelim.

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_4$	4	1	0	-1	-1
$\chi_5$	5	-1	1	0	0

Geriye sadece iki indirgenemez karakter kaldı. Bunları diklik bağıntılarını kullanarak belirleyeceğiz. Aslında alternatif yöntemler de mümkün, ama bu yöntemleri bulma zevkini de okuyucumuza bırakıyoruz.

İlk olarak derecelerin kareleri toplamı 60 olmalı. Bulduğumuz 3 karakter için bu toplam  $1 + 16 + 25 = 42$  olduğundan geriye kalan iki karakter için bu toplam 18 olmalı. 18 sayısını iki kare toplamı olarak sadece bir şekilde  $18 = 3^2 + 3^2$  olarak yazabiliriz. Dolayısıyla son iki karakterimiz 3'er boyutlu olacak. Şimdi (123) elemanındaki değerleri bulmalıyız. Bu değerlere  $a$  ve  $b$  diyelim:

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	3	$a$			
$\chi_3$	3	$b$			
$\chi_4$	4	1	0	-1	-1
$\chi_5$	5	-1	1	0	0

Sütun dikliğini kullanırsak, 1. ve 2. sütunlar,

$$0 = 1 + 3a + 3b + 4 - 5 \Leftrightarrow a + b = 0$$

verirken 2. sütun,

$$\frac{60}{20} = 1 + a^2 + b^2 + 1 + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

verir. Dolayısıyla  $a = b = 0$  buluruz. Benzer şekilde (12)(34) elemanındaki değerlere  $c$  ve  $d$  vs. dersek aşağıdaki tablo oluşur.

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	3	0	$c$	$e$	$f$
$\chi_3$	3	0	$d$	$f$	$e$
$\chi_4$	4	1	0	-1	-1
$\chi_5$	5	-1	1	0	0

Son hesaplara geçmeden isimlendirmemiz hakkında kısa bir açıklama yapalım. Karakterlerin 5'li döngülerdeki değerlerine dikkat edin! Yer değiştirerek yazmamızın sebebi,  $A_5$ 'in bu 5'li döngülerin yerini değiştiren bir otomorfizmasının olmasıdır. Bu otomorfizma karakterlere de etki eder ve indirgenemez karakterleri boyutu koruyarak karıştırır. Dolayısıyla bu elemanlardaki değerlerin yeri değiştirilerek elde edilen karakterler de tabloda görülmeli. Sadece iki karakter kaldığı için değerler değişmeli olarak belirlenmeli.

Artık hesaplara geçebiliriz. Bir önceki adımda olduğu gibi 1. ve 3. sütunların dikliği,

$$c + d = -2$$

denklemini verirken, 3. sütundan,

$$c^2 + d^2 = 2$$

buluruz. Bu denklemleri çözdüğümüzde  $c = d = -1$  olduğu ortaya çıkar. Böylece geriye sadece iki değer kalmış oldu. Yine sütunların dik olmasını kullanalım. 1. ve 4. sütundan,

$$e + f = 1$$

denklemini bulunur. Bir diğer denklemse 4. sütundan gelecek:

$$e^2 + f^2 = 3$$

İlk denklemin karesini alıp ikinciye çıkarırsak,

$$ef = 1$$

buluruz. Öyleyse  $e$  ve  $f$  sayıları  $x^2 - x + 1 = 0$  denkleminin kökleri olmalı. İkinci derece denklemlerin köklerini veren formülü kullanırsak,

$$e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ ve } f = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

elde ederiz. Böylece karakter tablosunu tamamlamış olduk.

$[[g]]$	1	20	15	12	12
$A_5$	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	3	0	-1	$e$	$f$
$\chi_3$	3	0	-1	$f$	$e$
$\chi_4$	4	1	0	-1	-1
$\chi_5$	5	-1	1	0	0

### Dolaysız Çarpımların Karakterleri

$G$  ve  $H$  sonlu grupları ve  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ve  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$  kümeleri verilsin. Amacımız  $G \times H$ 'nin indirgenemez karakterlerini bulmak. Bu problemin çözümü beklentilerimizin en basiti:

**Teorem 1.**

$$\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G \times H) = \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \times \text{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$$

Bu gösterimde  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  ve  $\phi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(H)$  ise  $(\chi, \phi)$  ikilisini her  $(g, h) \in G \times H$  için,

$$(\chi, \phi)(g, h) = \chi(g)\phi(h) \quad (*)$$

eşitliğini sağlayan fonksiyon olarak tanımlıyoruz.

*Kanıt.* Teoremi iki adımda kanıtlayacağız. İlk olarak yukarıda tanımladığımız fonksiyonun  $G \times H$ 'nin indirgenemez karakterini verdiğini gösterelim. Bu amaçla  $\chi$ 'ye karşılık gelen  $\mathbb{C}G$ -modüle  $V$ ,  $\phi$ 'ye karşılık gelen  $\mathbb{C}H$ -modüle  $W$  diyelim. Şimdi  $V \otimes W$  vektör uzayı üzerinde  $G \times H$ -etkisini aşağıdaki gibi tanımlayalım: Her  $(g, h) \in G \times H$  ve  $v \otimes w \in V \otimes W$  için,

$$(g, h) \cdot v \otimes w = (g \cdot v) \otimes (h \cdot w)$$

Verilen eşitliğin  $V \otimes W$  vektör uzayını bir  $\mathbb{C}[G \times H]$ -modül yaptığı ve ortaya çıkan modülün karakterinin  $(*)$  eşitliğiyle verildiği açıktır.

Şimdi karakter olduğunu bildiğimiz  $\chi \times \phi := (\chi, \phi)$  ikilisinin indirgenemez olduğunu kanıtlamak için kendisiyle iç çarpımını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & \langle (\chi, \phi), (\chi, \phi) \rangle \\ &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g, h) \in G \times H} (\chi \times \phi)(g, h) \overline{(\chi \times \phi)(g, h)} \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{(g, h) \in G \times H} \chi(g)\phi(h)\overline{\chi(g)\phi(h)} \\ &= \langle \chi, \chi \rangle_G \cdot \langle \phi, \phi \rangle_H \\ &= 1 \end{aligned}$$

Çarpımın 1 olması karakterin indirgenemez olduğunu kanıtlar. Yukarıdaki gösterimde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  ile grup  $G$  için tanımlanan iç çarpımı belirtiyoruz.

Geriyeye  $G \times H$  grubunun bütün indirgenemez karakterlerinin bu yöntemle elde edilebileceğini göstermek kaldı. Bunun için  $|\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G \times H)|$ 'i hesaplayalım. Hatırlarsanız bu sayı grubun eşlenik sınıflarının sayısına eşitti. Eğer  $(g, h), (g', h') \in G \times H$  eşlenirse o zaman en az bir  $(x, y) \in G \times H$  için,

$$(g', h') = (x, y)(g, h)(x^{-1}, y^{-1})$$

eşitliği sağlanmalı. Ama bu eşitlik aynı zamanda  $g$  ve  $g'$ 'nin  $G$ 'de,  $h$  ve  $h'$ 'nin de  $H$ 'de eşlenik olduğunu veriyor. Diğer yandan, bir önceki cümleyi tersten yazarsak, koordinatları eşlenik olan ikililerin dolaysız çarpım grubunda eşlenik olduğunu da buluruz. Dolayısıyla, beklendiği üzere,  $G \times H$  içindeki eşlenik sınıflarının sayısı  $G$ 'nin ve  $H$ 'nin eşlenik sınıflarının sayılarının çarpımına eşittir. Öyleyse benzer bir eşitlik indirgenemez karakterlerin sayısı için de doğru olmalı, yani,

$$|\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G \times H)| = |\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)| \cdot |\text{Irr}_{\mathbb{C}}(H)|$$

Ama zaten yukarıda tariflerini verdiğimiz indirgenemez karakterlerin sayısı eşitliğin sağındaki sayı kadar. Dolayısıyla iddiayı kanıtlamış olduk.  $\square$

**Örnek 1.** Bu örnekte mertebesi 6 olan devirli grubun karakter tablosunu bulalım:  $C_6 = C_2 \times C_3$  olduğunu hatırlayalım.

Öncelikle mertebesi 2 olan grubun karakter tablosu şu şekildedir:

$C_2$	1	$a$
$\chi_1$	1	1
$\chi_2$	1	-1

Diğer taraftan mertebesi 3 olan grubun karakter tablosuysa şu şekildedir:

$C_3$	$e$	$a$	$a^2$
$\phi_1$	1	1	1
$\phi_2$	1	$\omega$	$\omega^2$
$\phi_3$	1	$\omega^2$	$\omega$

Bu tabloda  $\omega = e^{2i\pi/3}$  alınmalıdır. Şimdi yukarıdaki yöntemi takip edip  $C_6$ 'nın karakter tablosunu bulabiliriz.

$C_6$	$e$	$a$	$a^2$	$b$	$ba$	$ba^2$
$\chi_1 \times \phi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 \times \phi_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	1	$\omega$	$\omega^2$
$\chi_1 \times \phi_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	1	$\omega^2$	$\omega$
$\chi_2 \times \phi_1$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_2 \times \phi_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
$\chi_2 \times \phi_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	-1	$-\omega^2$	$-\omega$

**Karşıt Örnek: Devirli Merkezi Olup Sadık İndirgenemezi Olmayan Bir Grup:  $C_3 \rtimes S_3$**

Son olarak başlıkta belirttiğimiz örneği kura-  
cağız. Bu örnek aynı zamanda dolaysız çarpımlar  
için elde ettiğimiz yukarıdaki sonucun yarı-dolaysız  
çarpımlar için geçerli olmadığını da gösterecek.

Örnek grubumuz  $G = C_3 \rtimes S_3$  olacak. İncelemeye  
geçmeden önce kısa bir bilgi verelim. Mertebesi 18  
olan 5 grup bulunuyor, bunlardan ikisi abel ( $C_{18}$ ,  
 $C_3 \times C_6$ ) üçü abel değil. Abel olmayan iki grubu  
belirlemek zor değil: Her çift derecede bir dihedral  
grup bulunur. Öyleyse ilk grubumuz  $D_{18}$ . Bir de  
dolaysız çarpımla  $C_3 \times S_3$  oluşturabiliriz. Bu iki gru-  
bun izomorfik olmadığını görebilmek için  $D_{18}$ 'in  
mertebesi 9 olan bir elemanı olduğunu ancak diğer  
grubun böyle bir elemana sahip olmadığını belirte-  
lim. Geriye kalan son grup yukarıda belirttiğimiz  
yarı-dolaysız çarpım grubu olacak. Başka bir grup  
olmadığı iddiası bu yazının amaçlarının dışına çık-  
tığından cevaplamayacağız.

Şimdi ilgilendiğimiz grup  $G$ 'nin elemanlarını

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = 1, ab = ba, cac = a^{-1}, cbc = b^{-1} \rangle$$

kurallarıyla oluşturabiliriz. Dikkat ederseniz mer-  
tebesi 3 olan  $a$  ve  $b$  elemanları değişmelidir. Dola-  
yısıyla  $P := \langle a, b \rangle \cong C_3 \times C_3$  altgrubunun mertebesi  
9'dur. Ayrıca  $|G : P| = 2$  olduğundan  $G$ 'de normal-  
dir. Bu grubun toplam 4 tane mertebesi 3 olan  
altgrubu bulunur, üreteçleri sırasıyla  $a, b, ab, a^2b$   
olarak seçilebilir. Yine yukarıdaki ilişkilerden görü-  
lebileceği gibi,  $c$  elemanı  $a$  ve  $b$ 'yi tersleriyle eşlediği  
için bu altgrupların her birisi  $G$ 'de normal olacak.  
Mertebeleri 6 olan bölüm gruplarının her biri  $S_3$ 'e  
izomorfik olacaktır. (Neden?)

Son olarak mertebesi 2 olan  $c$  elemanının birim  
eleman ve kendisi dışındaki diğer hiçbir elemanla  
değişmeli olmadığını da verilen ilişkilerden rahat-  
lıkla çıkarabiliriz. Öyleyse  $c$ 'nin merkezleyeninin  
mertebesi 2, yani eşlenik sayısı 9'dur.

Tüm bunları birleştirdiğimizde  $G$ 'nin eşlenik sı-  
nıflarının temsilcilerinin  $1, c, a, b, ab, a^2b$  olduğunu  
buluruz. Karakter tablomuzun ilk satırını yazabili-  
riz.

$  g  $	1	9	2	2	2	2
$C_3 \times S_3$	1	$c$	$a$	$b$	$ab$	$a^2b$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1

Geri kalan 5 indirgenemez karakteri bulmak için  
bölüm gruplarından yükseltme yapacağız. Merte-  
besi 3 olan her altgruba bölüm  $S_3$  olduğundan bu  
yöntemle bir tane 1 boyutlu, 4 tane de 2 boyutlu ka-  
rakter bulmayı beklemeliyiz. Toplam 5 olduğundan  
tüm karakterlerin bu yolla elde edileceği sonucuna  
ulaşırız. Bölüm gruplarından yükseltme yöntemini  
daha önce görmüştük, o yüzden bu adımı atlıyor

ve karakter tablosunu sunuyoruz.

$  g  $	1	9	2	2	2	2
$C_3 \times S_3$	1	$c$	$a$	$b$	$ab$	$a^2b$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	1	1	1
$\chi_3$	2	0	-1	-1	-1	2
$\chi_4$	2	0	2	-1	-1	-1
$\chi_5$	2	0	-1	2	-1	-1
$\chi_6$	2	0	-1	-1	2	-1

Tabloyu incelediğimizde indirgenemez karakterle-  
rin hiçbirinin sadık olmadığını görebiliriz. Ayrıca  
grubun merkezinin aşikâr altgrup olduğu da yuka-  
rıda ilişkilere çıkarılabilir. Dolayısıyla  $C_3 \times S_3$   
gerçekten de merkezi devirli olan, ama hiç sadık  
indirgenemez karakteri olmayan bir gruptur.

### Canavar Grup

Yazılarımızı sonlu grup temsillerinin en ilginç  
ve zor örneklerinden biriyle bitirelim. Basit sonlu  
grupların sınıflandırılması probleminin de önemli  
adımlarından biri bu grupların listesinin belirlen-  
mesiydi. Sonsuz grup ailelerinin yanı sıra, sonsuz  
ailelere dahil olmayan istisnai gruplar da bulun-  
yor. Bu grupların en büyüğü, varlığı 1970'lerin  
başında B. Fischer ve R. L. Griess tarafından ön-  
görülen ve daha sonrasında Griess tarafından inşa  
edilen *Canavar Grup*  $M'$ 'dir. Adı eleman sayısından  
geliyor:

$$\begin{aligned} |M| &= 2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \\ &\quad \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71 \\ &= 808017424794512875886459904961710 \\ &\quad 757005754368000000000 \end{aligned}$$

Griess'in bu mertebeden bir grubu tarif etmek için  
kullandığı yöntem temsil teoretik: Griess'in kanıtı,  
Canavar grubu, boyutu 196833 olan birleşme özel-  
liği olmayan bir cebirin otomorfizmaları grubu ola-  
rak belirlenir.

Canavar'ın indirgenemez karakterleri Fischer,  
D. Livingstone ve M. P. Thorne tarafından bel-  
irlenmiştir. Canavar basit bir grup olduğundan  
(yani kendisi ve aşikâr altgrubu dışında normal  
altgrubu olmadığından), sadece bir tane 1 boyutlu  
karakteridir. Toplam 194 tane olan indirge-  
nemez karakterlerin 1 boyutlu olmayan en düşük  
boyutlusu 196883 boyutludur! Canavar'ın karakter  
tablosu bilinmekte ve aşağıdaki bölümde tanıtaca-  
ğımız *sonlu gruplar atlas*'in 8 sayfasını kaplamak-  
tadır.  $194 \times 194$  boyutlarındaki bu matrisi belirleme  
işinin ne kadar muazzam olduğunu hayal edebiliriz!

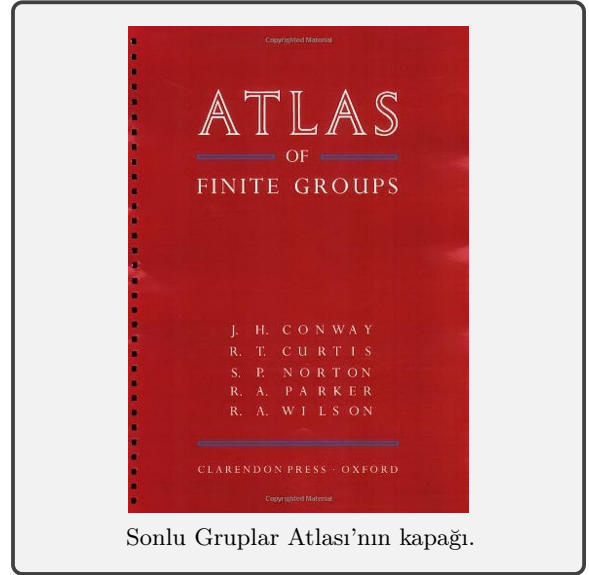
Canavar grubun bir diğer özelliği de diğer ist-  
tisnai grupların hemen hemen hepsini altbölüm  
grubu olarak içermesidir.

Teknik doğasından dolayı daha fazla detay ekleyemsek de ilgili okuyucuyu hem kaynaklardaki kitap ve makalelere hem de (dikkatli olmak koşuluyla) çevrimiçi kaynaklara yönlendiriyoruz. Kısa bir giriş için Richard E. Borcherds'ın *AMS Notices* dergisinin Ekim 2002 sayısında yayımlanan "What is The Monster" yazısını tavsiye ederiz. Oradaki kısa referans listesi daha ileri okumalar için de iyi bir başlangıç olacaktır.

## Sonlu Gruplar Atlası

Özgün başlığıyla *The Atlas of Finite Groups*, 1985 yılında John Horton Conway, Robert Turner Curtis, Simon Phillips Norton, Richard Alan Parker ve Robert Arnott Wilson tarafından yayımlanan ve 93 basit sonlu grubun karakter tablolarını içeren bir kitaptır. O günden bu yana güncellenen ve artık çevrimiçi bir kaynağa dönüşen *atlas*'ın üçüncü baskısı <https://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/> adresinde bulunuyor. Bu sayfadaki bilgiye göre yaklaşık 716 grup ve bu grupların 5215 temsili hakkında bilgi içeriyor.

Aşağıdaki görselde kitabın boyutu tam olarak anlaşılabilir. Bendeki kopyasının yüzeyini iki tane MD kopyasıyla, yanlarda birer parmak açıklık kalacak şekilde kaplayabiliyorum.



Sonlu Gruplar Atlası'nın kapağı.

Basılı ve basılı olmayan kaynaklardaki bilgilerin toplanıp geliştirildiği bu kitap karakterler teorisi için önemli bir kaynaktır. Kriğini yapmak için yetkinliğim yok, ama hem derslerde hem de doğruluğunu test etmem gereken bazı iddialarda kullandığımı söylemeliyim. İlgili okuyucu hem kitabın kendisine hem de kitap hakkında yazılmış çok sayıda makaleye çevrimiçi kaynaklardan ulaşabilir. Son olarak Canavar grubun karakter tablosunun ilk sayfasını ekleyelim. Fotoğraflar bendeki kopyadan.

$M = F_1$

$M = F_1$

i	e	e
80861742479451287588645	83095629624528523	
990496171075700575436800000000	82355161088000000	3:
	p power	A
	p' part	A
	1A	2A
1nd		
$x_1$ +	1	1
$x_2$ +	196883	4371
$x_3$ +	21296876	91884

Canavar grubun karakter tablosunun küçük bir bölümü ve bu küçük bölümün büyütülmüş köşesi. İkinci sıradaki karakterin boyutuna dikkat!

# Grup Temsilleri: Problemler

**Olcaý Coşkun**

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com

Aşağıda sonlu grup temsilleriyle ilgili çeşitli zorluk derecelerinde problemler var. Daha fazlasını kaynaklar listemizdeki kitaplarda bulabilirsiniz.

**Problem 1.**  $A_4$  grubunun indirgenemez karakterlerini hesaplayınız.

Sonlu grup  $G$  için,  $\chi = \bar{\chi}$  eşitliğini sağlayan karakter  $\chi$ 'ye gerçel denir.

**Problem 2.** Grup  $G$ 'nin gerçel indirgenemez karakterlerinin sayısının tersiyle eşlenik olan elemanlarının eşlenik sınıflarının sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

**Problem 3.** Eğer  $G$ 'nin mertebesi tek sayıysa,  $G$ 'nin biricik gerçel indirgenemez karakterinin aşikâr karakter olduğunu gösteriniz.

Sonlu grup  $G$ 'nin karakteri  $\chi$  verilsin. Bu karakterin çekirdeği

$$K_\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$$

olarak tanımlanır ve  $K_\chi \trianglelefteq G$  sağlanır. Aşağıdaki problem  $G$ 'nin normal altgruplarının karakter tablosundan belirlenebileceğini vermektedir.

**Problem 4.** Her  $N \trianglelefteq G$  için

$$N = \bigcap_{\chi \in I} K_\chi$$

eşitliğini sağlayan bir altküme  $I \subseteq \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$  vardır.

**Problem 5.** Karakter tablosunun determinanı nedir?

**Problem 6.** 5'inci dereceden simetrik grup  $S_5$ 'in karakter tablosunu belirleyiniz.

**Problem 7.** Sonlu grup  $G$ 'nin karakteri  $\chi$  ve karşılık gelen temsili  $\rho$  verilsin.

$$\det \chi : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \det(\rho(g))$$

ile tanımlanan fonksiyonun  $G$ 'nin bir boyutlu temsili olduğunu gösteriniz.

**Problem 8.** Mertebesi 8 olan  $D_8$  ve  $Q_8$  gruplarının 2. dereceden indirgenemez karakterleri  $\chi$  ve  $\chi'$  olsun.  $\det \chi$  ile  $\det \chi'$  karakterlerinin farklı olduklarını gösteriniz.

Yukarıdaki problemde, determinant ile belirlenen karakterleri karşılık gelen grupların karakter tablolarındaki 1 boyutlu karakterlerle eşliyoruz. Bu iki grubun karakter tabloları aynı idi. Dolayısıyla iddiamız determinan karakterlerinin farklı satırlara karşılık geldiğidir.

**Problem 9.** Asal sayılar  $p < q$  için,  $pq$  mertebesinden abel olmayan grup  $G$ 'nin karakter tablosunu belirleyiniz. (İpucu: Önce olası karakter derecelerinin 1 ve  $p$  olduğunu gösterin!)

**Problem 10.** Eğer  $G$ 'nin sadık indirgenemez bir karakteri varsa,  $\chi$  diyelim,

$$Z(G) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

**Problem 11.** Sonlu grup  $G$ 'nin karakteri  $\chi$  ve 2. mertebeden elemanı  $g$  verilsin. Aşağıdaki iki önermeden birinin doğru olduğunu gösteriniz:

1)  $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{4}$  denkliği sağlanır ya da

2)  $G$ 'nin indeksi 2 olan bir alt grubu vardır.

**Problem 12.** Sonlu grup  $G$ 'nin, her  $1 \neq g \in G$  için  $\chi(g) = 0$  koşulunu sağlayan karakteri  $\chi$  verilsin. Bu durumda  $|G|$ 'nin  $\chi(1)$  bölüğünü gösteriniz.

**Problem 13.** Aşikâr olmayan indirgenemez karakter  $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 'nin

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

**Problem 14.** Maschke'nin Teoremi'nin tersinin de doğru olduğunu gösterin: Eğer  $F$  cisminin karakteristiği grubun mertebesi  $|G|$ 'yi bölüyorsa  $G$ 'nin  $F$ -temsilleri tam indirgenebilir değildir.

(İpucu: Düzenli modül  $FG$ 'nin aşikâr olmayan bütün  $FG$ -altmodülleriyle aşikâr olmayan kesişimi bulunan bir  $FG$ -altmodülü olduğunu gösterin.)