

## 8. Mertebeden Gruplar

**Olcaý Coşkun**

Boğaziçi Üniversitesi

olcaycoskun@gmail.com



Düşük mertebeli grupları sınıflandırırken ilk zorlukla 8. mertebede karşılaşırız. Öncesinde, 1, 2, 3, 5, 7 asal olduğundan bu mertebelerde birer grup bulunur. Mertebe 4'te sadece iki tane abel grubu varken 6'da bir abel ve bir abel olmayan grup bulunur. Basit işlemlerle bu mertebelerde başka gruplar olmadığı gösterilebilir.

Bu kısa notta mertebe 8'i ele alacağız. Öncelikle sonlu abel grupların sınıflandırılması teoreminden 3 tane abel grubu olduğunu söyleyebiliriz:  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Şimdi  $G$  mertebesi 8 olan ve abel olmayan bir grup olsun. Lagrange Teoremi'nden dolayı  $G$ 'nin her bir elemanının mertebesi 8'i bölmelidir. Dolayısıyla olası mertebeler 1, 2, 4 ve 8'dir. Ancak eğer mertebesi 8 olan bir eleman olsaydı  $G$  döngüsel, özel olarak abel, olurdu ki bu mümkün değil. Diğer taraftan 1 sadece birim elemanın mertebesidir. Öyleyse sadece iki seçenek var: 2 ve 4.

Eğer mertebesi 4 olan eleman olmasaydı, yani birim olmayan tüm elemanların mertebesi 2 olsaydı o zaman her  $g, h \in G$  için  $gh$ 'nin de mertebesi 2 olurdu. Ama bu durumda  $ghgh = 1$  eşitliğini soldan  $g$  ve sağdan  $h$  ile çarpıp  $hg = gh$  bulurduk. Yani  $G$  abel olurdu.

Sonuç olarak  $G$ 'nin mertebesi 4 olan bir elemanı olduğunu bulduk. Bu elemanı  $x$  ile gösterelim ve  $y \in G - \langle x \rangle$  olsun.  $\langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$  alt grubunun indeksi 2 olduğundan  $G$ 'nin normal alt grubudur. Öyleyse  $xyx^{-1} \in \langle x \rangle$  olmalı. Eşlenik alma işlemi mertebeyi koruduğu için  $xyx^{-1} \in \{x, x^3\}$  elde ederiz. Ama  $xyx^{-1} = x$  olsaydı  $G$  abel olurdu. Öyleyse  $xyx^{-1} = x^3$  olmalı.

Geriye sadece  $y$ 'nin mertebesini belirleme kaldı. İki durum söz konusu:

1.  **$y$ 'nin mertebesi 2 ise:** Bu durumda  $G$ 'nin iyi bilinen  $D_8$  grubu olması gerektiği açıktır:

$$G = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1, yxy = x^3 \rangle$$

2.  **$y$ 'nin mertebesi 4 ise:** Bu durumda  $\langle x \rangle$  ile  $\langle y \rangle$ 'nin kesişiminde birim olmayan bir eleman bulunmalıdır. Gerçekten, diğer durumda  $\langle x \rangle \langle y \rangle$  alt grubunun mertebesi 16 olurdu ki bu mümkün değil. Aslında  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$  alt grubu iki elemanlı olmalı. Dolayısıyla  $x^2 = y^2$  buluruz. Şimdi  $z \in G - (\langle x \rangle \cup \langle y \rangle)$  olsun.  $z$ 'nin mertebesi de 4 olmalı. (2 olsaydı  $y$  yerine  $z$ 'yi kullanırdık!) Ayrıca yukarıdaki fikri uygularsak  $z^2 = x^2$  olması gerektiğini de görürüz. Öyleyse  $G$  grubunu

$$\langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^4 = 1, x^2 = y^2 = z^2, yxy^{-1} = x^3 \rangle$$

buluruz. Bu grup kuaterniyon birimlerinin grubu olan  $Q_8$  ile eş yapılıdır.

Başka bir olasılık kalmadığından, aşağıdaki teoremin kanıtını tamamlamış olduk!

**Teorem 1.** *Mertebesi 8 olan her grup aşağıdaki 5 gruptan biriyle eş yapılıdır.*

$$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_8, Q_8$$

Yukarıdaki fikirleri kullanarak  $p > 2$  asal sayısı için mertebesi  $p^3$  olan grupları sınıflandırmayı deneyebiliriz. Bu mertebede de 3'ü abel olan 5 grup vardır. Abel grupları 2'yi  $p$  ile (4'ü  $p^2$  ile vs) değiştirerek elde edilir. Abel olmayanlar içinse biraz daha zorlu hesaplar gereklidir. Başka bir kısa notta bu sınıflandırmayı yapmayı planlıyoruz.

1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{Z}_1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6, S_3 \cong D_6$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2^3, D_8, Q_8$

Mertebesi  $\leq 8$  olan grupların listesi.