Rubik Küp Grubu

Olcay Coşkun
Boğaziçi Üniversitesi
olcaycoskun@gmail.com

Rubik küp yazımızda bulmacanın temellerini öğrendik. Rubik grup inşasını yaptık ve temel hamlelerle ilgili özellikleri inceledik. Bu yazımızdaysa biraz daha teknik olarak Rubik küp grubunun yapısını incelemek istiyoruz.

Yazımızda kullanacağımız tüm grup teoretik altyapıyı Ali Nesin'in grup teori kapak konularında [4] bulabilirsiniz. MD arşiv ekibinin büyük katkısıyla web sayfamızda sunduğumuz bu altyapı yazılarına yandaki karekodu kullanarak hızlıca erişebilirsiniz.

Bu yazımızın iki amacı var. İlkin, parçaları çıkarılıp rasgele yeniden takılan bir Rubik küpün çözülebilir olup olmadığını belirleyen bir teorem ispatlayacağız. İkinci olarak, Rubik küp grubunun ve parça söküp takmaya izin veren hileli küp grubunun cebirsel tarifini yapacağız. İlk bölümün aksine grupların tarifi biraz teknik olacak. Yine de grup teorinin ve grup kurulumlarının çok güzel bir örneği olduğundan bu hesaplar ilgi çekicidir. Yazı boyunca yararlandığımız kaynaklar yazının sonunda, yeni bir sonuç kanıtlamadık. Daha derinlemesine bir inceleme için okuyucuları bu kaynaklara bakmaya davet ediyoruz.

Rubik küpü bozmanın bir diğer yolu da üzerindeki etiketleri söküp rasgele takmaktır. Bu tür bir etiketlemeyle çözülebilir bir küp elde etme olasılığımız çok düşüktür. Yazının sonunda kısaca bahsedeceğiz.

Görsel1: Rubik ve küpü (1974) [8]

Rubik küpü çözmeye çalışanlar bilir, bazen, özellikle köşe kübikler gevşeyebiliyor. Hatta yerinden çıkabiliyor. Tabii hile amacıyla da parça söküp takmak mümkün. Rubik küpün çözülebilir olup olmadığını anlamanın bir yolu küpü çözmeye çalışmaktır. Birkaç denemeden sonra çözümsüzlüğü gözleyebiliriz. Ama matematiksel olarak ilginç olan soru şudur: Hiç çözme teşebbüsünde bulunmadan küpün hileli olup olmadığını anlayabilir miyiz?

Örneğin çözülmüş küpün bir kenar kübiğini çıkarıp, ters olarak takarsak küpü çözmek mümkün olmayacaktır. Ya da sadece köşe kübiklerden birini çıkarıp bir tur çevirip takarsak da küp çözülmez. Bunlar kolay durumlar, ama çok sayıda parçayı, hatta merkez kübikler hariç tüm kübikleri çıkarıp rasgele takabiliriz. Bu durumda çözülebilirlik gerçek bir soru olur.

Bu yazıyı (ve öncesindeki Rubik küp yazısını) okurken elinizde bir Rubik küp olması bazı tanımları anlamanızı ve bazı iddiaların cebirsel ispatını fiziksel olarak görmenizi sağlayacaktır. Mutlaka bir tane edinmenizi öneririz.

Önceki gösterimleri kullanmaya devam edeceğiz. $\mathcal{R}$ ile Rubik küp grubunu gösteriyoruz. Üreteçleri daha önce tarif edilen basit döndürmeler olan bu grubu,

$$\mathcal{R} = \langle O, A, D, B, K, G \rangle$$

olarak gösterelim. Amacımız bu grubun cebirsel yapısıyla ilgili sonuçlara ulaşmak. Her ne kadar somut fiziksel simetrilerden ortaya çıkmış olsa da bu grubu permütasyonlar ve grup işlemleri kullanarak belirlemek istiyoruz.

Dilimler grubu

Tüm sonuçlara hazırlık olması için öncelikle $\mathcal{R}$'nin bir altgrubu olan dilimler grubu $\mathcal{D}$'yi inceleyeceğiz. Yukarıdaki basit döndürmeler listesinde olmayan ama gruba dahil olan üç basit döndürme daha bulunuyor: Ortanca dilimleri döndürmek.

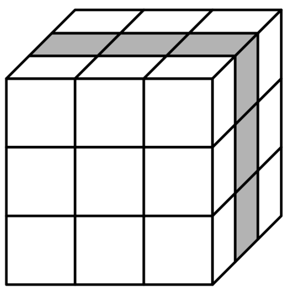
M_o ile ön yüzün arkasındaki ortanca dilimin (bkz. Şekil 2) saat yönünde 90° döndürülmesini gösterelim. Benzer şekilde M_d ve M_g döndürmeleri de vardır. Bu gösterimlerle *dilimler grubu*,

$$\mathcal{D} = \langle M_o, M_d, M_g \rangle \leq \mathcal{R}$$

olarak tanımlanır.

Rubik küp grubu için yapacağımız incelemeyi dilimler grubunda örneklendireceğiz.

Not 1. Bu nokta grup teorinin yöntemlerinden de bahsetmek için oldukça uygun. $\mathcal{D}$ grubunu üreteçlerle tanımladık, ama bu tanım bize elemanlar hakkında, grubun mertebesi ya da altgrupları hakkında sınırlı bilgi vermektedir. Bu tür bilgileri elde etmenin sık kullanılan iki yolu var. İlk yol, tabii ki elemanları çarpmak, terslerini hesaplamak ... yani bilek gücü kullanarak çalışmak. İkinci yolsa grubun yapısını başka nesnelere (örneğin kümelere) olan etkisi aracılığıyla anlamaya çalışmak. Aşağıda ikinci yöntemi kullanacağız.



Şekil 1: Ön yüzün ardındaki orta dilim.

Dilimler grubunun doğal olarak etki edeceği küme, tabii ki kübikler kümesidir. Her bir eleman kübikler kümesinin bir permütasyonunu verir. Bu etkiyle ilgili neler söylenebilir?

1. Sadece ortanca dilimleri döndürdüğümüz için köşe kübikler sabit kalacaktır. Bu sebepten incelememize köşe kübikleri dahil etmiyoruz.

2. Geriye iki tür kübik kalacak, kenar kübikler ve merkezi kübikler. $\mathcal{D}$'nin kenar kübiklerle merkezi kübiklerin yerlerini değiştirmesi mümkün değildir. O yüzden etkiyi bu iki tür kübikler üzerinde ayrı ayrı düşünebiliriz.

3. Merkezi kübikler kümesini C ile gösterelim. C üzerindeki etki geçişken olacak. Yani sadece ortanca dilimleri döndürerek herhangi bir merkezi kübiği ön yüze taşıyabiliriz. Bunu göstermesi zor değil. Eğer Rubik küpünüzü hazırladıysanız, deneyebilirsiniz de!

4. Diğer taraftan kenar kübikler üzerindeki etki geçişken değildir. Bunu da küp üzerinde görmeniz çok kolay! Gerçekten de örneğin M_o sadece ön yüzün arkasındaki ortanca dilimi çevirdiği için, sadece bu dilim üzerindeki kenar kübikler (ve merkezi kübikler) yer değiştirirken diğer dilimlerde bulunan kenarlar sabit kalır. Dolayısıyla kenar kübikleri sadece dilim içinde karıştırabiliriz.

Son maddede geçişken bir etki ortaya çıkmadığı için bu etkinin yörüngelerini belirleyebiliriz. (Aslında yukarıdaki gözlemimiz bize yörüngeleri de veriyor.) Öncelikle S ile tüm kenar kübiklerinin kümesini gösterelim. Bu kümeyi doğal olarak üçe ayırabiliriz:

$$S = S_o \cup S_d \cup S_g$$

Bu gösterimde $\mathcal{D}$'nin üreteçleri için kullandığımız yöntemi kullandık, dolayısıyla, S_o önyüzün arkasındaki ortanca dilimin üzerindeki kenar kübiklerin kümesini göstermektedir. Dikkat edilirse, bu eşitlik S kümesini aralarında kesişmeyen üç alt kümenin birleşimi olarak vermektedir (yani S'nin bir parçalanışıdır). Ayrıca yukarıdaki gözlemlerden de kolayca görüleceği gibi $\mathcal{D}$ etkisi bu parçalanışa saygı duymaktadır, bir diğer deyişle, her bir bloğu kendi içinde karıştırmaktadır. Son olarak her bir blok üzerinde ayrı ayrı ve geçişken olarak etki ettiği de aşikârdır.

Buradan çıkaracağımız sonuç, $\mathcal{D}$'nin etkisini dört parça olarak inceleyebileceğimizdir. Başlangıçtaki amacımızı unutmayalım: Etkisine bakarak $\mathcal{D}$ hakkında sonuçlar elde etmek istiyoruz.

Not 2. Grupların kümeler üzerinde etkileriyle gruplardan simetrik gruplara giden dönüşümler arasında bir eşleme vardır. Bu eşlemeyi altyapı yazılarında bulabilirsiniz. Kısaca, eğer G grubu X üzerinde etki ediyorsa, bu etki $G \to \mathrm{Sym}(X)$ grubuna bir dönüşüm tanımlar. Açık olarak, $g \in G$ elemanın etkisi, X'in elemanlarını karıştırdığı için, X üzerinde bir permütasyondur ve yukarıdaki dönüşüm de g'yi bu permütasyona götürür. Aslında G'nin "soyut" elemanlarını daha somut olan permütasyonlarla (her zaman birebir olmasa da) eşler.

Şimdi yukarıdaki etki bize dört adet grup dönüşümü verecek:

$$r_o : \mathcal{D} \to \mathrm{Sym}(S_o), \quad r_d : \mathcal{D} \to \mathrm{Sym}(S_d),$$

$$r_g : \mathcal{D} \to \mathrm{Sym}(S_g), \quad s : \mathcal{D} \to \mathrm{Sym}(C)$$

Dikkat edilirse S'nin parçalanışındaki kümelerin eleman sayısı dörttür. Dolayısıyla $\mathrm{Sym}(S_?)$ gruplarının üçü de S_4 ile eşyapılı gruplardır. (Burada soru işareti yerine o, d, g harflerinden herhangi biri gelebilir.) Ancak ortanca dilimlerin dönüşleri düşünülürse $r_?$'nin görüntüsünün sadece bir 4'lü döngü tarafından üretileceği açıktır. Dolayısıyla,

$$r_?(\mathcal{D}) \cong C_4$$

olur. Burada C_4 ile mertebesi 4 olan döngüsel grubu gösteriyoruz.

Diğer taraftan merkezi kübik sayısı altı olduğundan $\mathrm{Sym}(C)$ ile S_6 eş yapılı olur. s'nin görüntüsünü belirlemek için C'nin üzerindeki etkiyi küp üzerinde düşünelim. O zaman, örneğin, M_o etkisini küpü saat yönünde 90° döndürerek de bulabiliriz. Sadece C üzerindeki etkiyle ilgilendiğimiz için diğer kübiklere ne olduğu bu noktada önemsizdir. Benzer şekilde merkezi kübikler üzerindeki tüm etkiler küpün döndürmeleriyle ve küpün tüm döndürmelerini de merkezi kübikler üzerindeki etkilerle tarif edebiliriz. Bir diğer deyişle, $\mathcal{D}$'nin görüntüsüyle küpün döndürmelerinin grubu eşyapılıdır. Bu sayıdaki simetri grupları yazımızda da gördüğümüz gibi bu grup S_4 ile eşyapılıdır. Dolayısıyla,

$$s(\mathcal{D}) \cong S_4$$

olduğunu bulduk.

Sırada bu dönüşümleri birleştirmek var:

$$\Phi : \mathcal{D} \to C_4 \times C_4 \times C_4 \times S_4 =: C_4^3 \times S_4$$

dönüşümünü $\Phi(\alpha) = (r_o(\alpha), r_d(\alpha), r_g(\alpha), s(\alpha))$ olarak tanımlayalım. Böylece $\mathcal{D}$'nin yapısı hakkındaki iddiamızı ortaya atabilecek konuma ulaştık.

Teorem 1. *Yukarıdaki gösterimlerle;*

1. *Φ birebirdir, yani dilimler grubu $C_4^3 \times S_4$'ün bir altgrubuyla eş yapılıdır,*
2. *Φ'nin görüntüsü*

$$\begin{aligned} \Psi : C_4^3 \times S_4 &\to \{1, -1\}, \\ (c_1, c_2, c_3, c_4) &\mapsto \prod_{i=1}^{4} sgn(c_i) \end{aligned}$$

dönüşümünün çekirdeğine eşittir.

Not 3. Bu sonucu ileri düzey grup teori gösterimi kullanarak,

$$1 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\Phi} C_4^3 \times S_4 \xrightarrow{\Psi} C_2 \longrightarrow 1$$

dizisinin tam olduğu şeklinde de ifade edebiliriz.

Kanıt. 1. Öncelikle Φ'nin çekirdeğinin birim elemandan oluştuğunu göstermeliyiz. Dönüşüm dört ayrı koordinattan oluştuğundan çekirdeği, bu koordinatların çekirdeklerinin kesişimine eşit olacaktır, yani,

$$\ker(\Phi) = \ker(r_o) \cap \ker(r_d) \cap \ker(r_g) \cap \ker(s)$$

olur. Şimdi r_o'nun etkisi sadece döndürdüğü dilimdeki kenar kubikleri etkilediğinden diğer kenar kübikleri sabitlemektedir. Benzer sonuç r_d ve r_g için de geçerlidir. Dolayısıyla ilk üç koordinatın çekirdeklerinin kesişimini tüm kenar kübikleri sabit bırakan elemanlar oluştururken s'nin çekirdeğini tüm merkezi kübikleri sabitleyen elemanlar oluşturur. O zaman dörtlü kesişimin her bir elemanı hem kenar kübikleri hem de merkezi kübikleri sabit bırakmalı. Ama böylesi her elemanın birim eleman olacağı aşikârdır. Bir diğer deyişle Φ birebirdir. Birinci izomorfizma teoremi Φ'nin görüntüsünün $C_4^3 \times S_4$'ün bir altgrubuyla eş yapılı olduğunu verir.

2. Kanıta geçmeden önce buradaki soyut iddiayı aslında, $\mathcal{D}$'nin görüntüsünün $C_4^3 \times S_4$'ün elemanlarının tam olarak yarısını oluşturduğu ve dahası bu görüntüyü bir tür işaretlemeyle belirleyebileceğimiz şeklinde yorumlayabileceğimizi belirtelim.

İddiayı kanıtlayabilmek için öncelikle $\mathcal{D}$'nin üreteçlerinin etkilerini düşünelim. Örneğin, M_o'nun etkisi S_d ve S_g kümelerini sabit tutup sadece S_o kümesinin elemanlarını döndürür. Dolayısıyla M_o'nun C_4^3 içindeki görüntüsü bir 4'lü döngü olacaktır. Aynı şekilde, M_o döndürdüğü dilimdeki 4 merkezi kübiği de döndürdüğünden, S_4 içindeki görüntüsü de bir 4'lü döngü olmalıdır. Diğer bir deyişle, M_o'nun görüntüsü iki adet 4'lü döngünün çarpımıdır ve bu tür permütasyonlar çifttir.

Benzer fikir M_d ve M_g'nin görüntüleri için de uygulanabilir. Öyleyse $\mathcal{D}$'nin elemanlarının çift permütasyonlar olacağını söyleyebiliriz, yani, $\Phi(\mathcal{D}) \subseteq \ker(\Psi)$ olur.

Geriye eşitliği kanıtlamak kaldı. Bunun için $\mathcal{D}$'nin mertebesinin $\ker(\Psi)$'nin mertebesine eşit olduğunu göstermek yeterlidir. İkinci mertebeyi bulmak kolaydır:

$$|\ker(\Psi)| = \frac{|C_4^3 \times S_4|}{2} = \frac{4^3 \cdot 24}{2} = 768$$

$\mathcal{D}$'nin mertebesini belirlemek için,

$$f : \mathcal{D} \to C_4^3 \times S_4 \to S_4$$

bileşkesini düşünelim. Buradaki ikinci dönüşüm son koordinata izdüşüm fonksiyonudur. Yukarıdaki s dönüşümü örten olduğundan f de örtendir. O zaman birinci izomorfizma teoreminden

$$\mathcal{D}/\ker(f) \cong S_4$$

olur ve buradan da

$$|\mathcal{D}| = 24 \cdot |\ker(f)|$$

elde ederiz. Böylece problemi f'nin çekirdeğinin mertebesini belirlemeye indirgemiş olduk. Kanıtın ilk bölümünden, $\mathcal{D}$'nin her elemanını (x, y, z, t) dörtlüleriyle gösterebileceğimizi biliyoruz. Ama f son koordinata izdüşümdü, o zaman çekirdekteki dörtlüler için t birim eleman olmalı. Ayrıca bu elemanların çift permütasyon olması gerektiğini de bulmuştuk. Öyleyse

$$\text{sgn}(x)\text{sgn}(y)\text{sgn}(z) = 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bizim bu eşitliğin çözüm sayısını bulmamız gerekli. Saymayı kolaylaştırmak için C_4 grubunu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ grubu olarak düşünelim. Bu durumda $\alpha \in \mathcal{D}$ için α'nın koordinatlarını belirleyebiliriz. Gerçekten de α'yı üreteçler M_o, M_d ve M_g'nin çarpımı olarak yazarsak $r_o(\alpha)$ bu çarpımdaki M_o sayısını verir. Benzer durum $r_d(\alpha)$ ve $r_g(\alpha)$ için de geçerlidir.

Ayrıca M_o, M_g ve M_d birer 4'lü düngü (yani tek) olduğundan $(x, y, z, 1)$'in $\ker(f)$'de olmasının $x + y + z$'nin çift olması demek olduğunu görürüz. Örneğin,

- $f(M_d M_o^{-1} M_g M_o) = (0, 1, 1, 1)$
- $f(M_d M_g^{-1} M_o M_g) = (1, 1, 0, 1)$
- $f(M_o M_g M_d^{-1} M_g^{-1} M_o M_g^{-1} M_d M_g)$
  $= (2, 0, 0, 1)$

elemanları bu koşulu sağlamaktadır ve çekirdekte yer alırlar (neden?). Dahası ilk üç koordinatlarının toplamı çift olan tüm dörtlüleri bu üç elemanın lineer toplamı olarak yazabiliriz. (Vektör uzayında baz gibi düşünerek kanıtlanabilir.) Dolayısıyla,

$$\ker(f) = \{(x, y, z, 1) \in C_4^3 \times S_4 | x + y + z \equiv 0 \bmod 2\}$$

olduğunu görmüş olduk. Şimdi tek yapmamız gereken bu kümenin eleman sayısını belirlemek, ama bu sayının $4^3/2 = 32$ olacağı açıktır. Bu son eşitlikle birlikte, beklediğimiz gibi, $|\mathcal{D}| = 32 \cdot 24 = 768$ olduğunu bulmuş olduk. □

Not 4. Yukarıdaki teorem dilimler grubunu $C_4^3 \times S_4$'ün altgrubu olarak iki farklı yolla tarif etti. Bu noktada Goursat Teoremi yazısına dikkatinizi çekmek istiyorum. Direkt çarpımın altgruplarını belirlerken sadece altgrupların direkt çarpımlarını düşünmek yeterli olmaz. Dolayısıyla elde ettiğimiz tarif, grubun yapısını tam olarak belirlemeye yetmez.

Yaptığımız bu analiz Rubik küpteki ortanca dilimlerin döndürmelerinden oluşan dilim grubunu cebirsel olarak ifade etti. Benzer fikirler kullanılarak $\mathcal{D}$ hakkında daha detaylı bilgi de toplamak mümkün. Örneğin döndürmelerin karelerinin ürettiği altgrubun yapısı düşünülebilir. Küp uygulaması olaraksa sadece kenar kübiklerin yerinde olmadığı bir küp için çözüm yöntemi geliştirebilirsiniz.

Aslında bu analiz, grup teorinin çalışma yöntemlerine de güzel bir örnek oluşturmaktadır. Somut bir problemden yola çıkıp soyut bir grup oluşturduk. Dahası somut-soyut arasındaki bu ilişkiyi kullanarak hem soyut yapıyı detaylandırdık hem de somut problemin çözümü için yeni bakış açıları geliştirdik. Bu prensibin daha açık bir örneğini sıradaki bölümde göreceğiz.

Hileli küp grubu

Şimdi esas amacımıza geri dönelim. Dilim grubu gibi sadece bazı kübikleri etkileyen grubun yapısındaki karmaşıklık $\mathcal{R}$'nin yapısının da karmaşık olacağının ipuçlarını veriyor. Yine de şansımızı deneyeceğiz. Bir diğer amacımızın da hileli küpleri belirleyebilecek bir yöntem elde etmek olduğunu hatırlatalım. Kanıtlayacağımız teoremle bozuk bir Rubik küpü biz mi düzeltemiyoruz yoksa küp mü hileli anlayabileceğiz.

İlkin, dilim grubunda yaptığımız gibi, kübiklere (ve kübikliklere) olan etkileri inceleyeceğiz. Ancak bu kez yönler konusuna da dikkat etmemiz gerekli: Küpü döndürdüğümüz zaman sadece kübiklerin yerini değil göreceli yönlerini de değiştirmiş oluyoruz. Kendi küpünüzde deneyerek ne demek istediğimizi çözmeye çalışın!

Alıştırma 1. *Döndürmelerin, kübik yüzeylerin yönlerine olan etkilerini Rubik küpünüz üzerinde gözlemleyin. Ayrıca yönlerin dilim grubunun tanımı için gerekli olmadığını da onaylayın.*

Kübikler üzerindeki etkiyi incelerken yönlerin permütasyonlarıyla yerlerin permütasyonlarını birbirinden ayrı düşünmeye çalışacağız. Sonuçta elde edeceğimiz tarif bu düşüncemizin çok isabetli olduğunu bize gösterecek.

Rubik küpün fiziksel yapısı bazı kısıtlamalar getirmektedir. Küpü sadece döndürerek tüm olası permütasyonlara ve yönlere ulaşmak mümkün değil. Ama eğer hileye izin verirsek, yani kübikleri yerinden çıkarıp istediğimiz gibi tekrar takmak mümkün olursa, o zaman tabii ki tüm olası dizilimleri bulabiliriz. (Bunu, bozuk bir küpü yapmak için kullanabileceğimiz gibi çözümsüz bir küp elde edip arkadaşlarımızı kandırmak için de kullanabiliriz.) Hileli hareketlere izin verdiğimizde ortaya çıkacak grup da doğal olarak daha büyük olacaktır. Bu şekildeki döndürme-çıkarıp takma işlemlerinden oluşan gruba *hileli küp grubu* diyeceğiz ve $\mathcal{L}$ ile göstereceğiz. Daha açık olarak, $\mathcal{L}$'nin üreteçleri aşağıdaki iki türden biri olacak:

1. $\mathcal{R}$'nin üreteçleri.
2. Kenar ya da köşe kübiklerinden istediğimiz kadarını çıkarıp rasgele yerine takma.

Grup işlemi yine bu üreteçleri ardı ardına uygulamak olarak tanımlanıyor. Dikkat edilirse küpün mekanik yapısında ya da kübiklerin yüzeylerindeki etiketlerde değişikliğe izin vermiyoruz. Daha az koşulla başladığımız için $\mathcal{L}$'nin yapısını belirlemek daha kolay olacak. Biz de ilk olarak bu grubuyla çalışacağız.

Yön değişimlerini takip edebilmek ve yer değişimleriyle ilgisini kurabilmek için aşağıdaki işaretlemeyi kullanacağız. İşaretlemeyi sadece kübikler üzerinde değil, kübiklikler üzerinde de yapacağız, yani işaretler fiziksel olarak küp üzerinde bulunduğu gibi küpün işgal ettiği boşlukta da duracak.

İlk olarak kenar kübiklerinin aşağıda belirtilen yüzlerine + işareti koyalım.

1. Kuzey yüzde bulunan *ko* ve *kd* kenar kübiklerinin kuzey yüzleri.

2. Ön yüzde bulunan *od* yüzünün ön yüzü.

3. Yukarıdaki üç yüzün dilim grubu altındaki yörüngelerinde bulunan her bir yüz.

Üçüncü maddeyle birlikte işaretlerin yerini belirleme biraz zorlaşıyor. Ama kendi küpünüze küçük kâğıt parçaları yapıştırarak kübikliklerin hangi yüzlerinde + elde edeceğimizi görmeye çalışabilirsiniz. Üzerinde + olan yüzlerin sıralı tam listesini açıklıyoruz: İlk harf + olan yüzü göstermek üzere,

$$1 : ko, 2 : kd, 3 : ak, 4 : bk, 5 : bo, 6 : od,$$

$$7 : da, 8 : ab, 9 : og, 10 : dg, 11 : ga, 12 : gb$$

Kenar kübiklerin hem yönlerini hem de sıralamasını veren bu listeyi (yani sıralı kümeyi) S ile gösterelim.

Köşelerin işaretleri biraz daha kolay. Üst dilimde bulunan köşe kübiklerin kuzey yüzlerini, alt dilimde bulunan köşe kübiklerin güney yüzlerini + ile işaretleyelim. Sıralama şöyle olacak:

$$1 : god, 2 : gad, 3 : kod, 4 : kad,$$

$$5 : kob, 6 : kab, 7 : gab, 8 : gob$$

Oluşan kümeyi V ile göstereceğiz. Şekil 2'de tüm + işaretlerinin yerlerini, Şekil 4'teyse kübiklerin sıralamasını görebilirsiniz. Merkezi kübiklerdeki harfler yüzlerin isimlerini belirtiyor.

Şimdi hileli küp grubunun V ve S kümeleri üzerindeki etkisinin tanımladığı grup dönüşümünlerini, sırasıyla,

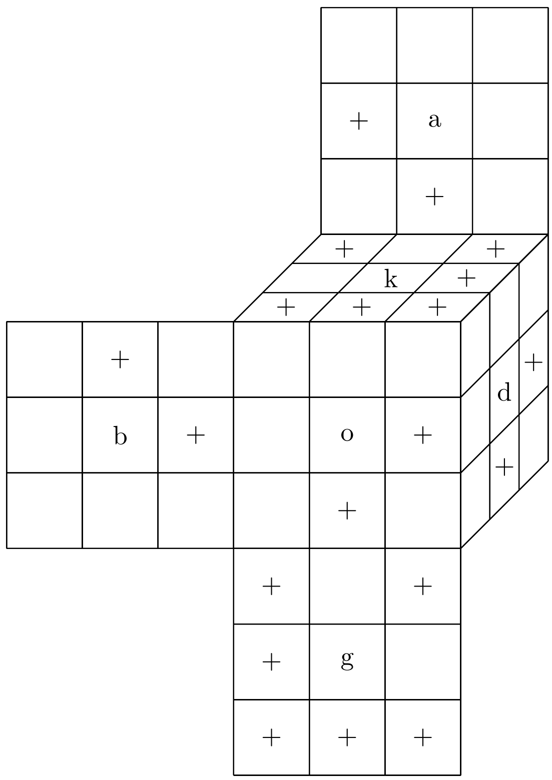
$$v : \mathcal{L} \to \mathrm{Sym}(V)$$

ve

$$u : \mathcal{L} \to \mathrm{Sym}(S)$$

ile gösterelim. Bu iki dönüşüm kübiklerin yerlerini belirlerken yönlerinde olan değişimleri görmezden gelmektedir. Etkinin yönleri nasıl değiştirdiğini anlamak için birer tane daha fonksiyona ihtiyacımız var.

Önce köşe kübikleri düşünelim. Hileli küp grubu $\mathcal{L}$'nin her elemanı köşe kübiklerin yerini değiştirirken üzerlerine koyduğumuz + işaretlerinin bulunduğu yüzler de yer değiştirir. Örneğin ön dilimi saat yönünde bir kere döndürürsek 1, 3, 5 ve 8 numaralı kübikler dönecek, diğerleri sabit kalacak. Bu sırada ön dilimdeki köşelerde kuzey ve güney yüzlerinde bulunan + işaretleri sırasıyla doğu ve batı yüzlerine gidecek. Sıralamayı v dönüşümü takip ettiğinden biz sadece + işaretlerini takip ediyoruz. O zaman, tek gördüğümüz, bazı artıların yerinin değiştiği olur.



Şekil 2: Kübikliklerin yönleri.

Bu değişimi anlamak için köşe kübiklerin 3 yüzü olduğunu ve + işaretinin herhangi bir yüze taşınabileceğini fark edelim. Bu yüzleri, + olanı 0, saat yününde 120° dönmeyle elde edeceğimiz yüzü 1 ve diğerini de 2 olacak şekilde adlandıralım. O zaman herhangi bir döndürmeden sonra + işaretlerinin yerini C_3^8 grubunun bir elemanıyla gösterebiliriz. Buradaki sıralama Şekil 4'teki köşe sıralamasıyla veriliyor.

Örneğin ön dilimi döndürmenin etkisi,

$$(2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2)$$

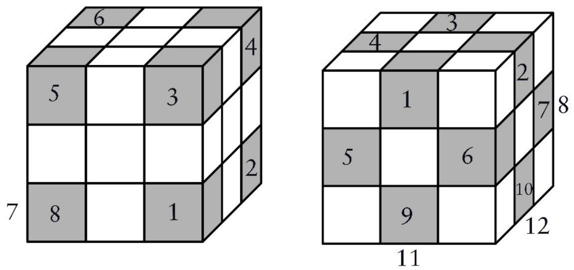
olur. Bu gösterimde, birinci koordinatı şöyle okuyoruz: O dönüşünden sonra 1 numaralı köşe kübiğindeki + işaretini doğru yerine getirmek için, kübiği saat yönünde 2 kere (yani 240°) döndürmeliyiz. Diğer koordinatlar da benzer şekilde okunur. Bu gösterimle,

$$a : \mathcal{L} \to C_3^8$$

fonksiyonunu elde ettik. Dikkat edilirse, beklediğimiz gibi, bu fonksiyon kübiklerin permütasyonlarını görmezden gelmektedir. Ancak v ile a'yı bir arada düşünürsek tam etkiyi görmüş oluruz:

$$a \times v : \mathcal{L} \to C_3^8 \times \mathrm{Sym}(V)$$

fonksiyonu $g \in \mathcal{L}$'yi $(a(g), v(g))$ elemanına götürür. İkinci koordinat köşe kübiklerin yerini verirken, ilk koordinatsa yönlerini belirler. Dikkat ederseniz, $a \times v$'ye sadece fonksiyon dedik, çünkü her ne kadar tanım ve görüntü kümeleri grup olsa da $a \times v$ grup işlemini korumamaktadır. Bunu düzelteceğiz, ama önce kenar kübiklere etkiyi düşünelim.



Şekil 3: Kübiklerin sıralaması. Küp dışında bulunan sayılar yakınındaki kübiğin karşısında bulunan kübiğin sıra numarasını gösteriyor.

Yukarıda tanımladığımız u dönüşümü kübiklerin yer değişimlerini takip ediyor. Yönler için de a'yı tanımlarken kullandığımıza benzer bir yöntem kullanacağız. Kenar kübiklerin iki yüzü olduğu için + işaretinin olduğu yüzü 0, diğerini 1 olarak adlandırırsak, yukarıdaki sıralamayı da kullanarak, kenar kübiklerin yüzlerindeki işaretleri 0 ve 1'lerden oluşan bir onikiliyle gösterebiliriz. Bu da bize,

$$b : \mathcal{L} \to C_2^{12}$$

fonksiyonunu verir. Böylece

$$b \times u : \mathcal{L} \to C_2^{12} \times \mathrm{Sym}(S)$$

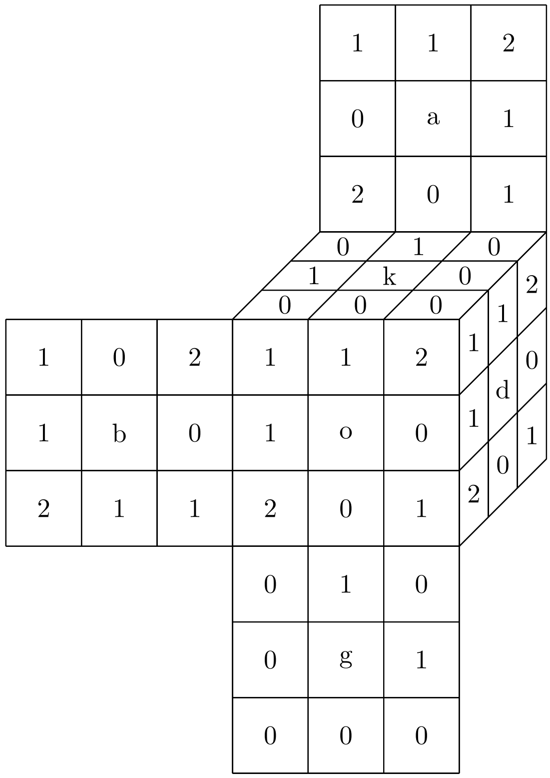
fonksiyonunu da elde etmiş olduk. Köşe kübiklerinde olduğu gibi, bu fonksiyon da bir grup dönüşümü değildir.

Şimdi tüm bu fonksiyonları birliştirip,

$$\Lambda := a \times v \times b \times u : \mathcal{L} \to C_3^8 \times \mathrm{Sym}(V) \times C_2^{12} \times \mathrm{Sym}(S)$$

tanımını yapalım. Bazı parçaları grup dönüşümü olmadığı için Λ da grup dönüşümü olmaz. Bu hatayı düzeltelim.

Rubik küp döndürmelerini tarif ettiği için Λ'yı ya da $\mathcal{L}$'yi değiştirmek istemiyoruz. O zaman tek yol, görüntü kümesindeki grup işlemini değiştirmek, yani direkt çarpım yerine başka bir işlem bulmak.



Şekil 4: Yüzlerin çözülmüş küpteki numaraları.

Bunun için öncelikle arka arkaya uygulanan iki döndürmenin etkisini anlamaya çalışalım ve $C_3^8 \times \mathrm{Sym}(V)$ kümesine bu etkiye uygun bir işlem koymayı deneyelim. Dikkat ederseniz, sorun aslında yönlerle ilgili. Çünkü kübiklerin yer değiştirmeleri zaten bir grup dönüşümüyle veriliyor. Öyleyse sadece yön değişimlerinin çarpım altındaki davranışını anlamalıyız. İddiamız şu:

> **Önsav 1.** *$g, h \in \mathcal{L}$ için,*
>
> $$a(gh) = a(g) + v(g)^{-1} a(h)$$
>
> *eşitliği sağlanır.*
> *Burada $v(g)^{-1}$ permütasyonu $a(h)$'nin koordinatlarını karıştırmaktadır.*

İddiamızı söze dökelim: Önce h sonra g'yi uyguladıktan sonra elde edeceğimiz yön, g ve h'yi ayrı ayrı uygulayarak elde edilecek yönlerin, h'den gelen yönün $v(g)$'nin tersiyle karıştırılmasından sonraki toplamıyla elde edilir. Bu iddiayı kanıtlamayı ödev olarak bırakacağız. Aslında en iyisi önce küp üzerinde işaretlemeler yapıp bir-iki testle bunu görmeye çalışmak. Cebirsel kanıt gözlemlerinizi güzelce yazmaktan fazlası olmayacak.

Şimdi bu işlemi soyut olarak ifade edelim. $(x,\alpha),(y,\beta)\in C_3^8\times \mathrm{Sym}(V)$ verildiğinde,

$$(x,\alpha)\cdot(y,\beta)=(x+\alpha^{-1}y,\alpha\beta)$$

işlemi $C_3^8\times\mathrm{Sym}(V)$ kümesi üzerinde bir grup işlemi tanımlar. Bu gruba yarı-direkt çarpım grubu denir ve $C_3^8\rtimes\mathrm{Sym}(V)$ ile gösterilir. Yarı-direkt çarpımlarla ilgili temel bilgilere yazının girişinde verdiğimiz linkten ulaşabilirsiniz.

Bu tanımla birlikte

$$a\times v:\mathcal{L}\to C_3^8\rtimes\mathrm{Sym}(V)$$

bir grup dönüşümü olur. Benzer şekilde aşağıdaki önsav da kanıtlanabilir.

Önsav 2. *$g,h\in\mathcal{L}$ için,*

$$b(gh)=b(g)+u(g)^{-1}b(h)$$

eşitliği sağlanır.
Burada $u(g)^{-1}$ permütasyonu $b(h)$'nin koordinatlarını karıştırmaktadır.

Fikrin devamı,

$$b\times u:\mathcal{L}\to C_2^{12}\rtimes\mathrm{Sym}(S)$$

grup dönüşümünü ortaya çıkaracak. Sonuç olarak,

$$\Lambda:\mathcal{L}\to(C_3^8\rtimes\mathrm{Sym}(V))\times(C_2^{12}\rtimes\mathrm{Sym}(S))$$

da bir grup dönüşümü olacaktır. Şimdi esas teoremlerimizden birini kanıtlamaya hazırız. Bu teorem hileli küp grubunu olabildiğince sade (!) bir şekilde ifade ediyor.

Teorem 2. *Yukarıda tanımladığımız Λ dönüşümü bir eş yapı dönüşümüdür, bir diğer deyişle,*

$$\mathcal{L}\cong(C_3^8\rtimes Sym(V))\times(C_2^{12}\rtimes Sym(S))$$

sağlanır.

Kanıt. Tek yapmamız gereken Λ'nın birebir ve örten olduğunu göstermek. Birebir olduğunu görmek kolay, çünkü dönüşüm kübiklerin yer ve yön değişimlerinin hesabını tutuyor. Eğer $g\in\mathcal{L}$ çekirdekteyse o zaman, g uygulamak herhangi bir kübiğin yerini veya yönünü değiştirmemeli. Bu ancak küpü olduğu yerde bırakarak mümkün olabilir, yani $g=1$ olmalı.

Örtenlik de benzer bir şekilde doğrulanabilir. Şöyle ki görüntü kümesindeki tüm elemanlar kübiklerin bir sıralamasını temsil etmektedir. Hileli küp grubundan elemanlar aldığımız için tüm bu durumlara ulaşmamız mümkün. Dolayısıyla Λ örten olmalı. □

Parçalar doğru takılmış mı?

En can alıcı noktaya geldik. Karışık olarak bulduğumuz / parçalarını rasgele taktığımız bir Rubik küpün çözülebilir olup olmadığını anlayabilir miyiz? Bu sorunun cevabını verdiğimizde soyut grup teori kullanarak elde ettiğimiz kısa bir zincirimiz olacak: somut → soyut → somut, yani, Rubik küpten yola çıkıp (somut) $\mathcal{L}$ grubunu bulduk (soyut), şimdi de bu soyut bilgiyi kullanarak küpün hileli olup olmadığını anlayacağız (somut). Bu sonuç Ann Scott'a ait.

Öncelikle soruyu cebirsel olarak ifade edelim. Eğer bir küp çözülebiliyorsa, bu durumda çözülmüş bir küpten hilesiz olarak elde ediliyor olmalı, dolayısıyla, kübiklerin dizilimi Rubik küp grubu $\mathcal{R}$'de temsil edilmeli. O zaman soru şöyle sorulabilir: Bir dizilim verildiğinde, yani hileli küp grubu $\mathcal{L}$'den bir eleman alındığında, bu eleman hangi koşullarda $\mathcal{R}$'nin içine düşer? Yanıt aşağıdaki teoremde.

Teorem 3. *Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

1. *$(x,\alpha,y,\beta)\in\mathcal{L}$ elemanı $\mathcal{R}$'dedir.*
2. *(a)-(b)-(c) koşulları sağlanır:*
   (a) *$sgn(\alpha)=sgn(\beta)$,*
   (b) *$x_1+\ldots+x_8\equiv 0$ mod 3,*
   (c) *$y_1+\ldots+y_{12}\equiv 0$ mod 2.*

Kanıt. Önce çözülebilir bir Rubik küpün verilen koşulları sağlaması gerektiğini gösterelim. Çözülebilir olan Rubik küpe çözülmüş küpten başlayarak ulaşabileceğimiz için ve çözülmüş küpün koşulları sağladığı açık olduğundan, koşulların $\mathcal{R}$'nin üreteçleri tarafından korunduğunu kontrol etmemiz yeterlidir.

Yukarıda belirttiğimiz gibi küp dilimlerinin döndürülmeleri kenar ve köşe kübikler üzerinde dörtlü döngüler olarak etki ederler. Ayrıca her bir üreteç, hem kenarlar hem de köşeler üzerinde birer dörtlü döngü vermektedir. Örneğin ön yüzü döndürmek kenarlar üzerinde (1 6 9 5) döngüsünü, köşeler üzerindeyse (1 8 5 3) döngüsünü verir. Bu döngüler tek olduğundan üreteçlerin her bir uygulaması α ve β'nın işaretini aynı anda değiştirir, yani (a) sağlanır.

(b) koşulu için öncelikle, K ve G üreteçlerinin köşelerin yönlerini değiştirmediğini gözlemleyelim. Diğer dört üreteç ise aynı anda iki köşenin yönünü birer arttırırken ikisinin yönünü de birer azaltır. Diğerleriyse sabit kalır. Gerçekten de, örneğin O üretecinin etkisi $(1,0,2,0,1,0,0,2)$ sekizlisidir. Diğer üç etkiyi belirlemeyi okuyucuya bırakıyoruz. Dolayısıyla, x_i'lerin toplamı mod 3'te değişmez, yani (b) sağlanır. (c) koşulu daha kolay, çünkü 6 üreteçten sadece ikisi, R ve L, kenarların yönünü değiştirir ve bunların her biri tam olarak dört kenarın yününde değişikliğe yol açar. Sonuç olarak toplam, mod 2'de sabit kalır.

Böylece ilk iddiayı kanıtlamış olduk. İkinci iddia için, koşulları sağlayan bir dörtlü verildiğinde, bu dörtlüye karşılık gelen küpün çözülebilir olduğunu göstermemiz gereklidir. O zaman (a), (b), (c) koşullarını sağlayan (x,α,y,β) dörtlüsü verilsin. İlk olarak α ve β'nın çift olduklarını varsayabiliriz. Eğer değillerse, üreteçlerden birini uygulayıp çift yaparız. (Bunun çözülebilirliği etkilemeyeceği açıktır.) Bu durumda köşelerin ve kenarların üçlü dögülerini kullanarak (örneğin C1 ve E1 uygulayarak) tüm kübikleri yerlerine taşıyabiliriz. Dolayısıyla, aslında α ve β'nın birim permütasyonlar olduğunu varsayabiliriz. Bir diğer deyişle, yönlerden bağımsız olarak, tüm kübiklerin kendi yerlerinde olduğu bir çözüme ulaşmış olduk. Sadece bazı yüzlerin yönleri doğru değil.

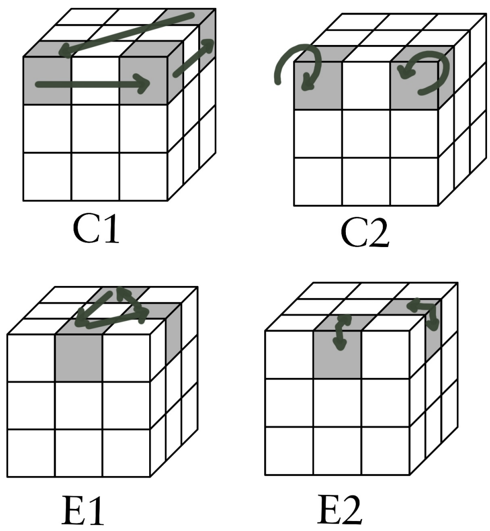
Şimdi (c) koşulu, çift sayıda kenar kübiğinin yönünün doğru olmadığını veriyor. E2 elemanıyla, diğer kübikleri değiştirmeden, kenarların yüzlerini ikişer ikişer değiştirebiliriz. Elde ettiğimiz küpte, artık sadece bazı kenar kübiklerinin yönleri yanlış olabilir. Son olarak (b) koşulu, saat yönünde (sy) ve saatin tersi yönde (sty) bozuk olan yönlerin sayısının mod 3'te eşit olduğunu belirtiyor (yani, 1'lerin toplamıyla 2'lerin toplamı mod 3'te birbirine eşit). Eğer birbirine komşu sy-sty bozuklukları varsa bunları C2 döndürmesiyle düzeltiriz. Sonuç olarak sadece saat yönünde 3 ya da saatin ters yönünde 3 bozuk köşe kalır. Bunları da C2'yi iki kere uygulayıp düzeltmek mümkün. Böylece küpü tamamen çözmüş olduk. □

Yukarıdaki kanıtta verilen çözüm yöntemi etkin bir yöntem değil. Kübikleri ve yönleri birlikte düşünmek daha hızlı çözümler verecektir. Bu teorem aynı zamanda $\mathcal{R}$'nin $\mathcal{L}$'nin altgrubu olarak bir tanımını da veriyor.

Teorem 4.

$\mathcal{R} = \{(x,\alpha,y,\beta) \in \mathcal{L} \mid (a)\text{–}(b)\text{–}(c)$ *sağlanır.*$\}$

$\mathcal{R}$'de özel elemanlar



Rubik küpü çözmek için çok sayıda teknik bulunmaktadır. Çözüm yöntemlerini tartışmak bu yazının amaçlarından biri olmasa da yukarıda gösterilen dört temel döndürmeye ihtiyacımız var. Görselden anlaşılacağı üzere, her bir dündürme gri kübikleri okların gösterdiği yönde değiştirirken diğer tüm kübikleri sabit tutar. İlgili okuyucu için bu döndürmeleri $\mathcal{R}$'nin üreteçlerinin çarpımı olarak verelim:

C1: $A^{-1}BG^2B^{-1}KBG^2B^{-1}K^{-1}L$

C2: $BG^2B^{-2}O^{-1}G^2OKO^{-1}G^2OBG^2B^{-1}K^{-1}$

E1: $D^2G^{-1}M_OK^2M_O^{-1}K^{-2}GD^2$

E2: $[M_O^{-1}GM_OG^{-1}M_O^{-1}G^2M_O,K]$

Bu teoremin bir uygulaması olarak arka kapağın içinde verilen küpün (Küp B) hileli olup olmadığını anlamaya çalışalım. Burada önemli olan nokta, yönleri ve permütasyonları nasıl belirleyeceğimiz sorusu. Aynı zamanda yukarıda verdiğimiz yön ve sıralamaların kullanımını da göstermiş olacağız.

Örnek 1. İlk olarak kenar kübiklerin permütasyonunu ve yönlerini belirleyelim. Kapakta görüldüğü gibi çözülmüş küpe A, diğerine B diyelim. 1 no'lu kübik (mavi-kırmızı) B küpünde 3 no'lu kenar kübiğinin yerinde, yani $u(1) = 3$ olmalı. A küpündeki 3 no'lu kenar kübikse (mavi-turuncu) B küpünde 1 no'lu kübiğin yerinde. Bu durumda,

$$u = (1\ 3)\dots$$

olur. İlk döngüyü tamamladık. Devamını bulmak için 2 no'lu kenarla (mavi-sarı) devam edelim. B küpünde bu kenar 7'de, A küpündeki 7 no'lu kenarsa B küpünde 10'da bulunuyor. Böyle devam edersek,

$$u = (1\ 3)(2\ 7\ 10\ 11\ 12\ 9\ 6\ 5)(4)(8)$$

permütasyonunu elde ederiz.

Şimdi yönleri belirleyelim. Bu kez her kenarın A küpündeki durumuna göre yüzlerinin durumuna bakacağız. Bunun için Şekil 2'deki + işaretinin Şekil 3'te hangi yüzde olduğunu bulmalıyız. Örneğin 1 no'lu kübik (mavi yüz 0) B küpünde 3 no'lu kübiklikte bulunuyor ve mavi yüz 1 ile işaretli yüze denk geliyor. Bu sebepten ilk koordinatımız 1 olmalı. Benzer şekilde 2 no'lu kübik (mavi yüz 0) B küpünde 7 no'lu kübiklikte ve mavi yüz 1 ile işaretli yüze denk geliyor. Diğer kenarların yüzlerini belirlemeyi okuyucuya bırakalım. Sonuçta bulmanız gereken 12'li aşağıda:

$$b = (1,1,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1)$$

Bununla birlikte kenar kübiklerinin görüntüsünü belirlemiş olduk. Şimdi köşelere bakalım. Yine ilk olarak permütasyonu belirleyelim. 1 no'lu köşe kübiği (kırmızı - sarı - yeşil) B küpünde 5 no'lu kübiklikte, A küpündeki 5 no'lu kübikse B küpünde 1 no'lu kübiklikte bulunuyor, yani,

$$v = (1\,5)\ldots$$

olmalı. Diğer kübiklerin yerlerini belirlemeyi okuyucuya bırakıyoruz:

$$v = (1\,5)(2\,7\,8\,4)(3)(6)$$

Son olarak köşe kübiklerin yönlerini belirleyelim. Yukarıdaki gibi, A küpündeki 0 numaralı yüzün B küpünde kaç numaralı yüzde bulunduğunu belirlemeliyiz. Dikkatli bir incelemeyle,

$$a = (0,0,2,1,1,0,0,2)$$

bulunur.

Böylece B küpünün hileli küp grubu içindeki görüntüsünü belirlemiş olduk. Son olarak teoremi uygulayıp küpün hileli olup olmadığını belirleyelim.

1. a'nın koordinatları toplamı 6 ve $6 \equiv 0 \bmod 3$ olduğundan koşul sağlanıyor.

2. b'nin koordinatları toplamı 8 ve $8 \equiv 0 \bmod 2$ olduğundan koşul sağlanıyor.

3. Elde ettiğimiz her iki permütasyon da çift, dolayısıyla koşul yine sağlanıyor.

O zaman verilen küp hileli değilmiş. Örneğimizi bir alıştırmayla bitirelim.

$\mathcal{R}$'nin merkezi

Bu köşede Rubik küp grubunun merkezini belirleyeceğiz. Bir grubun merkezi, diğer tüm elemanlarla değişmeli olan elemanlardan oluşan altgruptur. Örneğin simetrik grup S_n'nin merkezi aşikârdır, yani sadece birim elemandan oluşur.
$\mathcal{R}$'nin merkezini belirlemek için yukarıdaki teoremi kullanabiliriz. Öncelikle S_8 ve S_{12} içindeki her eleman $\mathcal{R}$'de göründüğünden ve bu elemanlara karşılık gelen koordinatlardaki çarpma simetrik gruptaki çarpmaya özdeş olduğundan, merkezi tüm elemanlar için α ve β birim elemana eşit olmalıdır. O zaman sadece $(x,1,y,1)$ biçimindeki elemanları düşünebiliriz.
Diğer taraftan $(a,\alpha,b,\beta) \in \mathcal{R}$ için

$$(a,\alpha,b,\beta)\cdot(x,1,y,1) = (x,1,y,1)\cdot(a,\alpha,b,\beta)$$

eşitliği x ve y'nin sabit olduğunu gösteriyor. (Neden?) Dolayısıyla

- $x = (0,0,\ldots,0)$ ya da $x = (1,1,\ldots,1)$ ya da $x = (2,2,\ldots,2)$
- $y = (0,0,\ldots,0)$ ya da $y = (1,1,\ldots,1)$

olmalıdır. Bu dörtlü aynı zamanda (b) ve (c) koşullarını da sağlamak zorunda olduğundan, x için tek olasılığın $x = (0,0,\ldots,0)$ olduğunu görürüz. Öyleyse merkezde sadece iki eleman bulunur: İlki y'nin de sadece 0'lardan oluştuğu birim eleman, diğeriyse $y_1 = (1,1,\ldots,1)$ olmak üzere $s = (0,1,y_1,1)$ elemanıdır. Bu eleman *super-flip* olarak adlandırılır.

Alıştırma 2. *Super-flip Rubik küpte, tüm kübiklerin yerli yerinde olduğu, tüm köşe kübiklerin doğru yönü gösterdiği ve tüm kenar kübiklerinse ters yönde olduğu durumdur. Küpünüzü, hile yapmadan, bu duruma getirebilir misiniz?*

Alıştırma 3. *Rubik küpünüzle tam olarak B küpünü elde edebilir misiniz?*

Son olarak $\mathcal{R}$'nin mertebesini belirleyelim. Bu sayı aynı zamanda parçaları rasgele takılan bir Rubik küpün çözülebilir olma olasılığını da verecek:

$$\frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}|}$$

Yukarıdaki teoremden, $|\mathcal{R}|$ eşitliğin sağındaki kümenin eleman sayısına eşittir. O zaman bu denklemlerin çözüm sayısını bulalım. (b)'deki toplam için sadece 3 olasılık var ve hepsi eşit sayıda çıkar. Dolayısıyla olası elemanların üçte biri tarafından sağlanır, yani $3^8/3$ tane çözüm vardır. Benzer şekilde (c)'deki denklemi sağlayan $2^{12}/2$ eleman bulunur. İşaretleri aynı olan permütasyon ikilileri de toplam ikililerin yarısı kadardır. Dolayısıyla,

$$|\mathcal{R}| = \frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

olur.

Sonuç 1. *Parçaları rasgele takılan bir Rubik küpün çözülebilme olasılığı* $1/12$*'dir.*

Bu olasılığı "birbirine dönüştürülemeyecek 12 Rubik küp var" ya da "birbirine denk olmayan 12 Rubik küp var" şeklinde de yorumlayabiliriz. Denk küpleri, Rubik küp grubu $\mathcal{R}$'nin elemanlarıyla birbirine dönüşebilen küpler olarak tanımlıyoruz. Peki bu denk olmayan küpleri nasıl bulabiliriz?

Bir tanesi orijinal Rubik küp. Başta da belirttiğimiz gibi, eğer bir köşe kübiğini çıkarıp, bir kez döndürüp, yerine takarsak küp çözülmez. Yukarıdaki teoremden de bu sonuca ulaşabiliriz, çünkü yeni küp (a) ve (c) koşullarını sağlarken, (b) koşulunu sağlamaz. Aşağıdaki liste birbirine dönüşemeyeceği bariz hileleri veriyor. Her birini çözülmüş küpe uygulayacağız:

1. Bir köşe kübiğini bir kere döndürmek.
2. Bir köşe kübiğini iki kere döndürmek.
3. Bir kenar kübiğini bir kere döndürmek.
4. İki kenar kübiğinin yerini değiştirmek.

Bu döndürmelerin çözümsüz küp üreteceğini teoremi kullanarak gösterebilirsiniz. Ayrıca listelediğimiz "temel hilelerle" ortaya çıkacak küpleri birbirine dönüştüremeyeceğimiz de aşikârdır. Dolayısıyla birden fazla hileyi birlikte yaptığımızda da farklı küpler bulmalıyız (1 ve 2 aynı anda olmamalı). Örneğin bir köşe kübiğini döndürüp iki kenar kübiğin yerini değiştirebiliriz. Ya da bunlara ek olarak bir kenar kübiğini döndürürüz.

Etiketleri değiştirmek

Son bölümde kısaca etiketleri söküp rasgele yeniden takmaya izin verirsek ne olacağını düşünelim. Sadece merkezi kübiklerin etiketleri yerinde kalsın! Böyle bir hileli küpün çözülebilmesi olasılığı çok düşüktür. Bazı basit durumları görmek kolaydır, örneğin herhangi bir kübiğe iki aynı renk etiket yapıştırılırsa diğer etiketlerin durumundan bağımsız olarak, küp çözülemez.

Şimdi kısaca çözülebilir olma olasılığını hesaplayalım. $|\mathcal{R}|$'yi bildiğimiz için sadece kaç farklı küp elde edebileceğimizi bulmamız yeterli. Merkezi kübikler dışında toplam 48 adet kübik var. Etiketleri rasgele yerleştirmek için 48! seçenek var. Ancak 6 rengin her birinden 8 etiket var ve bunların kendi aralarındaki permütasyonlarını saymamalıyız. Bu sebepten aslında sadece $48!/(8!)^6$ seçenek var. Öyleyse rasgele etiketlemeyle elde edilen bir Rubik küpün çözülebilme olasılığı

$$\frac{|\mathcal{R}| \cdot (8!)^6}{48!} \approx 10^{-14}$$

olur. Kübikleri söküp takmaya göre çok çok düşük bir olasılık! Neredeyse imkânsız!

Kaynaklar

[1] Joyner, D., *Advantures in Group Theory*, Second Edition, The Jonhs Hopkins University Press, (2008).

[2] Hecker, D., Banerji, R., *The Slice Group in Rubik's Cube*, Notes, (58) 4 (1985).

[3] Mulholland, J. *Permutation Puzzles*, Lecture Notes, 2021.

[4] Nesin, A. *Grup teori*, Matematik Dünyası, Sayı 2, 3, 4, (2013).

[5] Rubik, E. v.d., *Rubik's Cube Compendium*, Oxford University Press, 1988.

[6] Singmaster, D., *Notes on Rubik's Magic Cube*, Enslow Pub Inc. 1981.

[7] Slocum, J. v.d. *The Cube: The Ultimate Guide to the World's Best Selling Puzzle.* New York: Black Dog & Leventhal Publishers, Inc., 2009.

[8] `http://www.rubiks.com`

Rasyonel Simetriler

$V = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ grubunu rasyonel sayılar üzerindeki 2 boyutlu vektör uzayı olarak düşünelim.

1. V uzayının döndürme simetrilerinin grubunu tarif edebilir misiniz?
2. Bu grubun elemanlarıyla Pisagor Teoremi'nin ilişkisini görebiliyor musunuz?